

ニューラルシステムにおけるカオス

非線形システム特論

池口 徹

埼玉大学 大学院 理工学研究科 情報数理学専攻

338-8570 さいたま市 桜区 下大久保 255

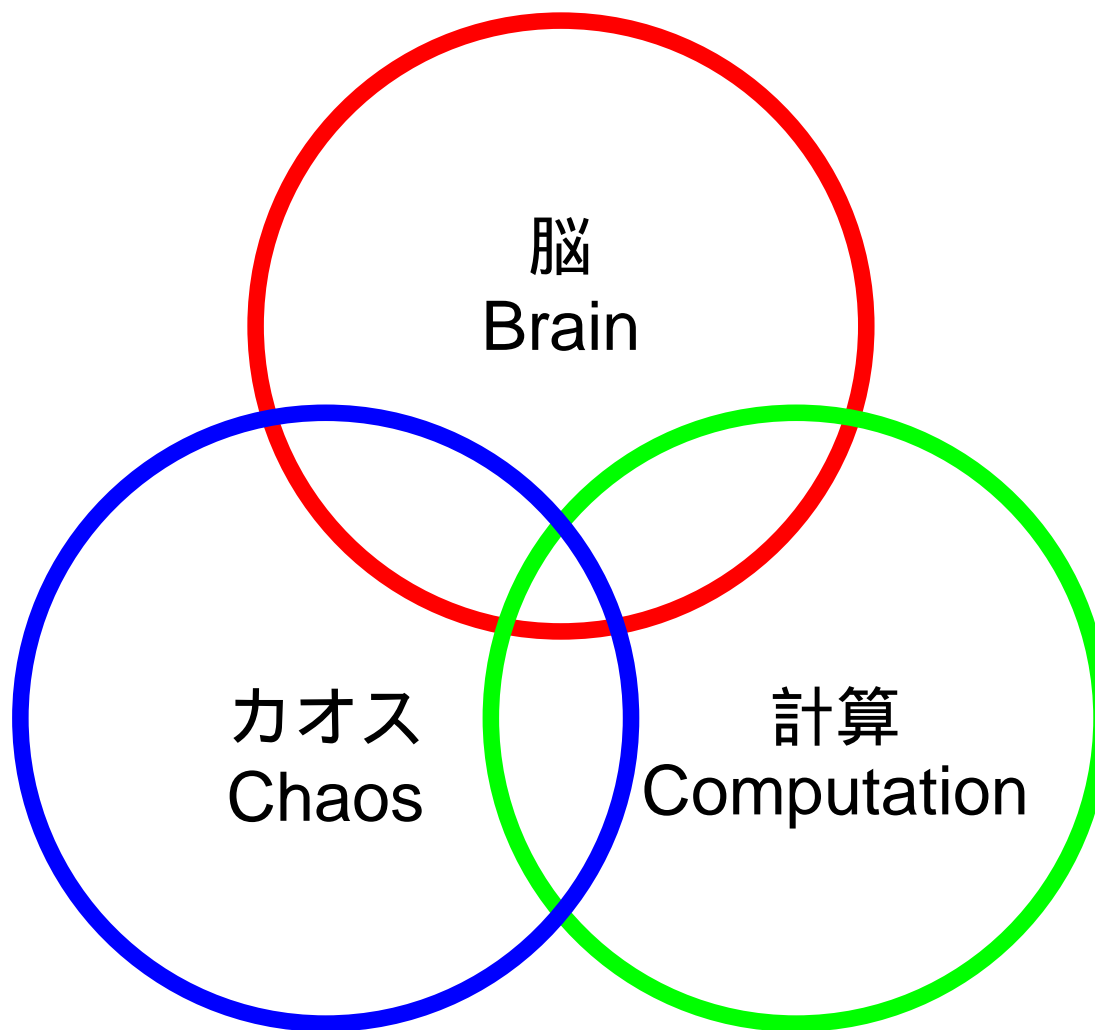
Tel : 048-858-3577, Fax : 048-858-3716

Email : tohru@ics.saitama-u.ac.jp

URL : <http://www.nls.ics.saitama-u.ac.jp/~tohru>

カオスと計算理論

神経回路網理論



内容

1. 神経系

- 構造
- ヤリイカと電気生理学
- 神経膜とその等価回路
- 活動電位
- Hodgkin–Huxley 方程式

2. 神経細胞のモデル化とニューロコンピューティング

- McCulloch–Pitts (形式ニューロン) モデル
- Caianiello モデル
- 南雲–佐藤 モデル
- カオスニューロンモデル

神経系における2種類の細胞

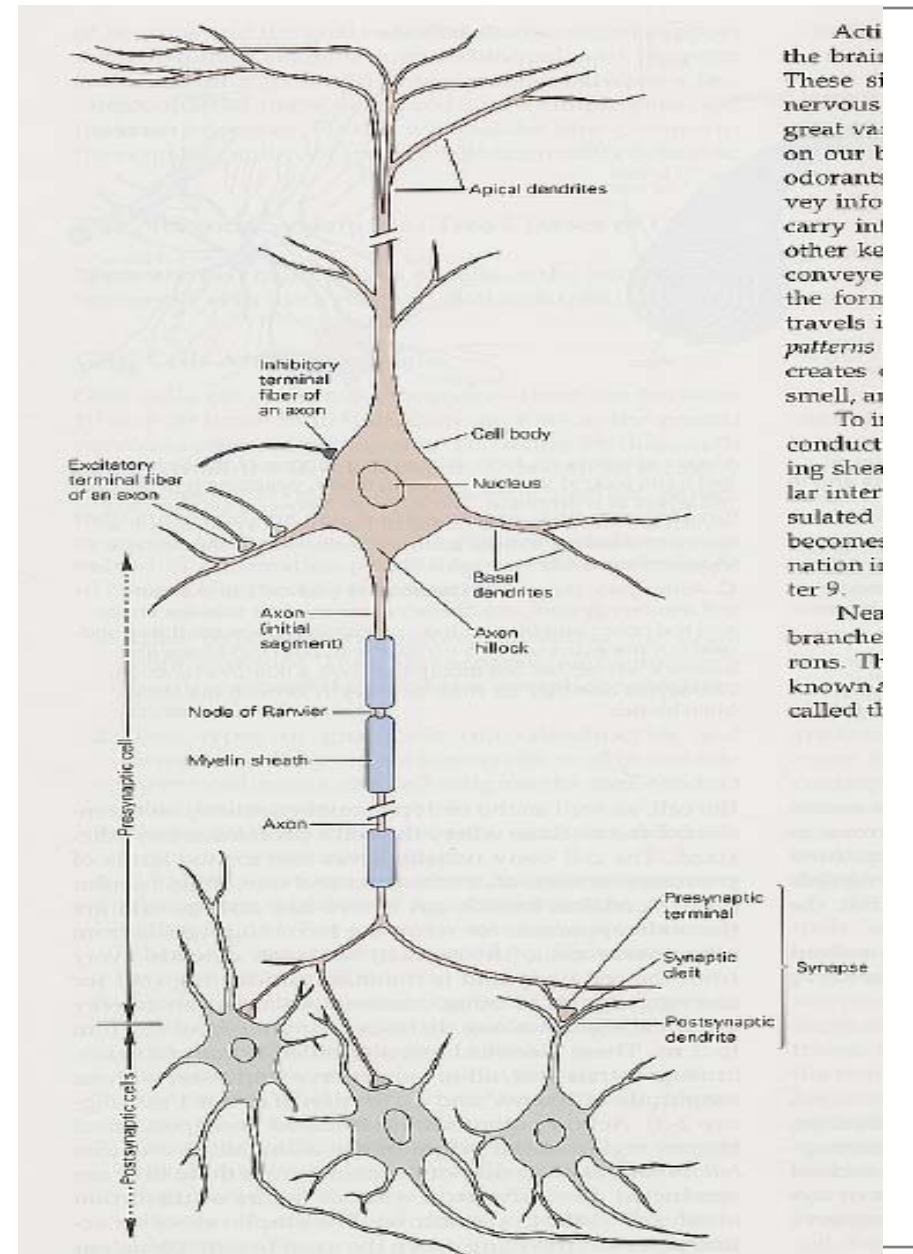
● グリア (glia) 細胞

- ニューロンの10～50倍の数
- ギリシャ語の「にかわ」
- 今のところ、脳における情報に直接関与していないと考えられている(?)
 1. ニューロンを保持
 2. ミエリン鞘を生成
 3. ニューロンの残骸消去
 4. ニューロンの信号伝達を補助
 5. ニューロンの移動, 軸索成長を補助
 6. 前シナプスの特性を管理
 7. 中毒物質から脳を保護

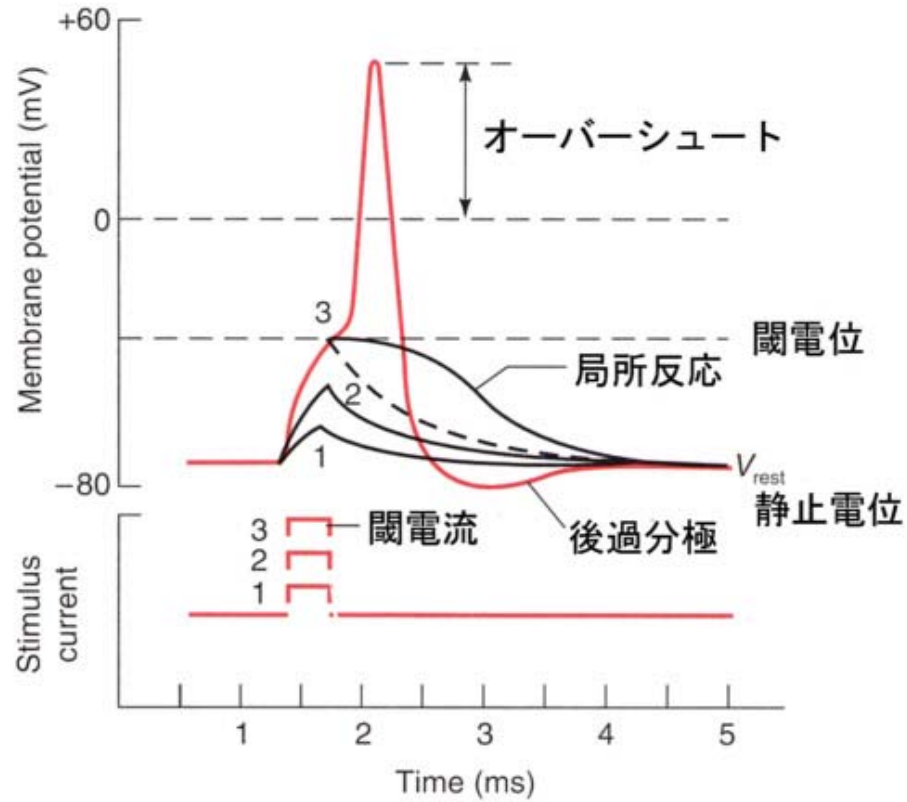
● 神経細胞 (neuron, nerve cells)

ニューロンの構造

- Cell body
 - Nucleus
- Axon
 - Axon hillock
 - Node of Ranvier
 - Myelin sheath
- Synapse
 - Presynaptic terminal
 - Synaptic cleft
 - Postsynaptic dendrites
- Dendrites
 - Basal dendrites
 - Apical dendrites



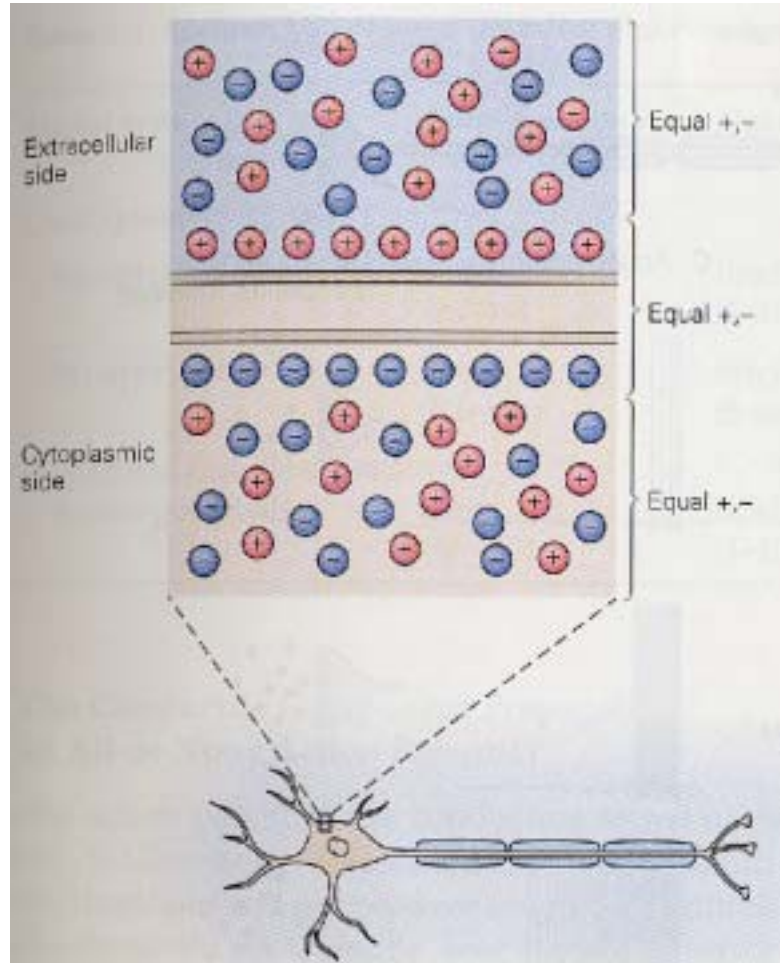
活動電位 (spike) の生成



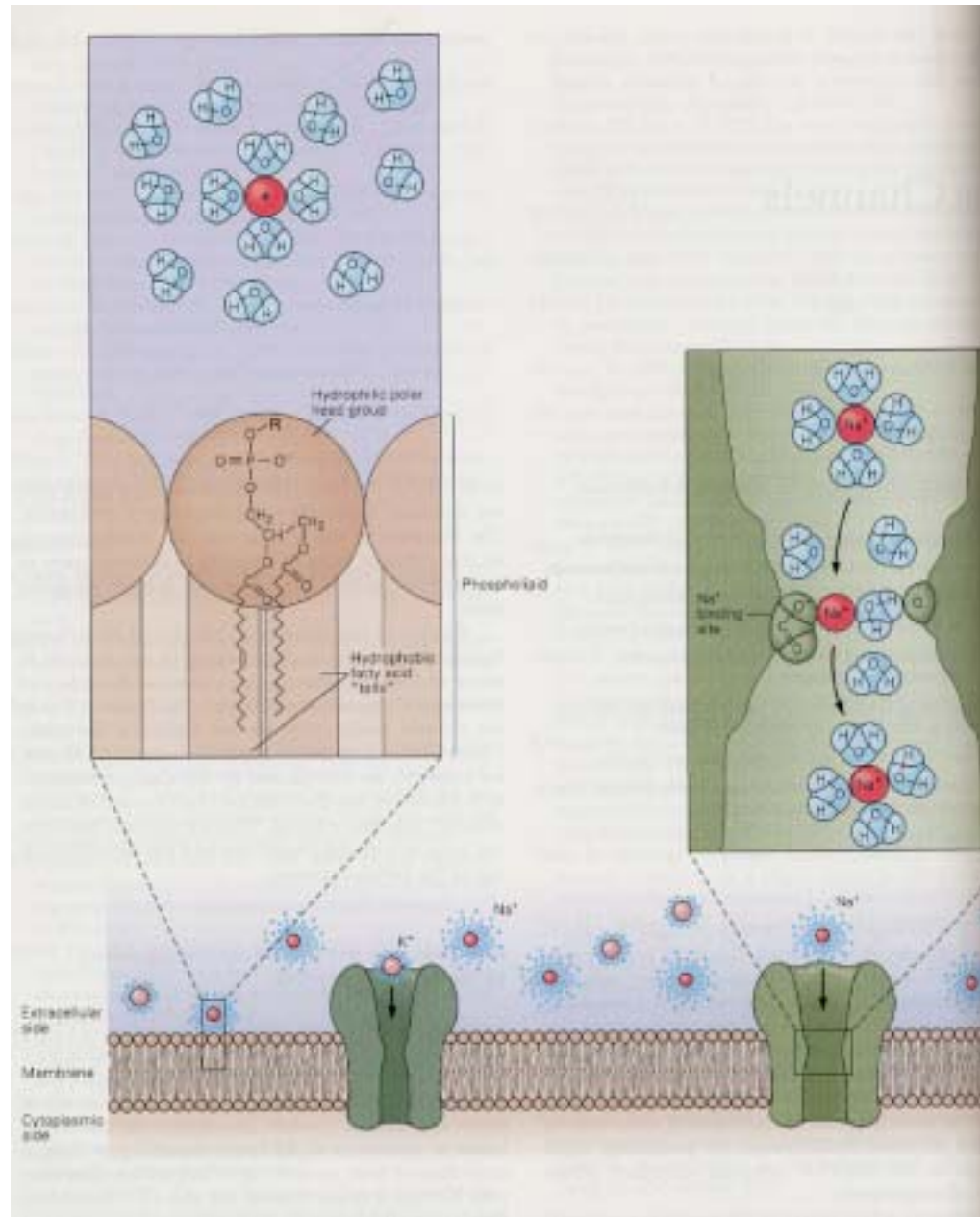
ヤリイカと電気生理学

- 神経膜の研究の進展に，ヤリイカが重要な寄与
 - 構造が単純
 - 神経が図太い．
軸索 $500\mu\text{m} \approx 0.5\text{ mm}$
⇒ 電位測定のためのガラス電極の挿入が容易
 - ホジキンとハクスレイが，(現象論的) モデルを提案 (1952)
⇒ ホジキン・ハクスレイ方程式
⇒ ノーベル医学生理学賞

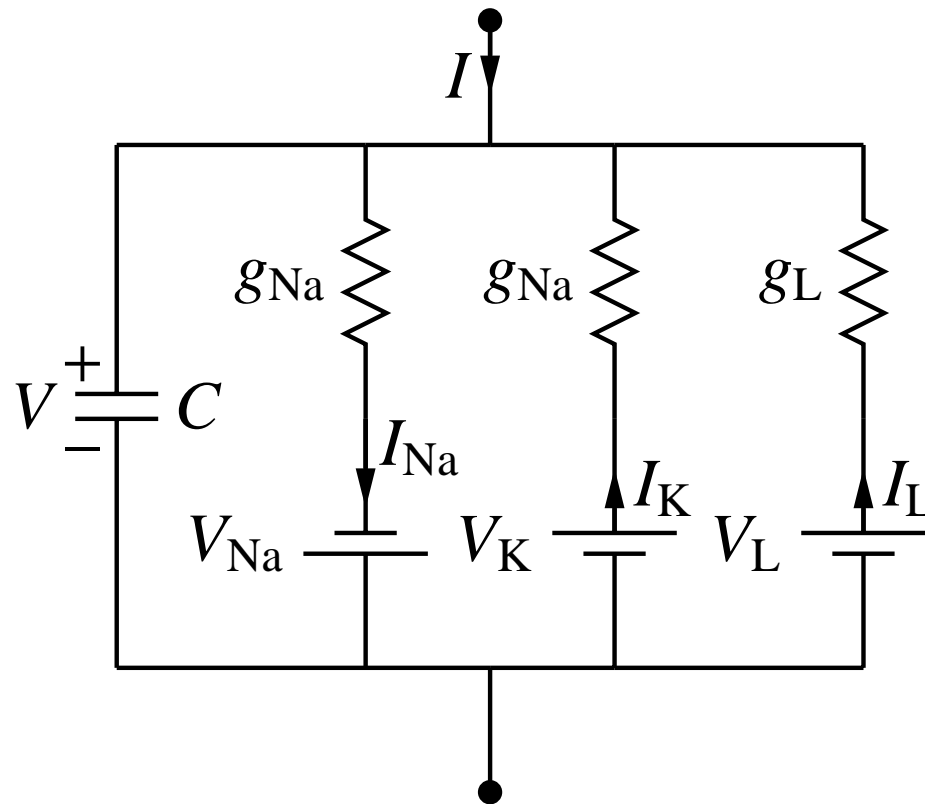
神経膜



イオンチャネル

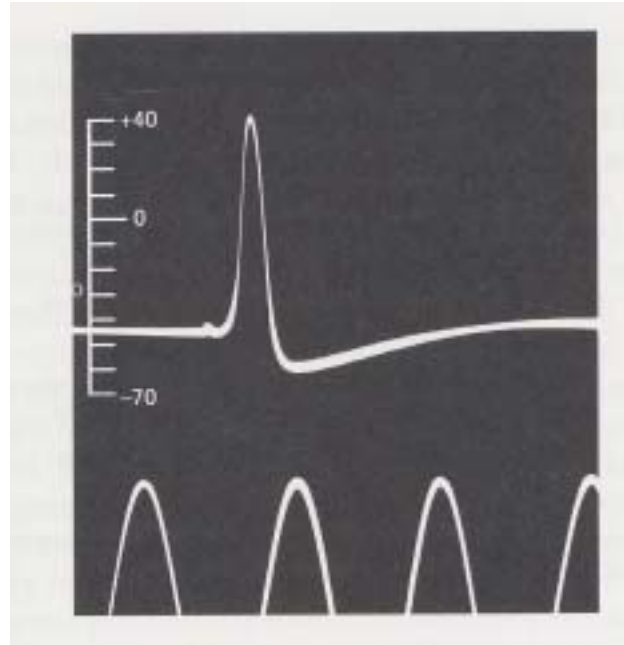


神経膜の等価回路モデル



- コンデンサ \Leftrightarrow 脂質二重層
- ナトリウムチャネル, カリウムチャネル, 漏れ
- g_{Na}, g_K は非線形時変コンダクタンス

ヤリイカ軸索における活動電位例



- Hodgkin and Huxley, 1939
- The first published intracellular recording
- squid giant axon
- 横軸 時間 500 [Hz] , 縦軸 電位 [mV]

ヤリイカと電気生理学

- 神経膜の研究の進展に，ヤリイカが重要な寄与
 - 構造が単純
 - 神経が図太い．
軸索 $500\mu\text{m} \approx 0.5 \text{ mm}$
⇒ 電位測定のためのガラス電極の挿入が容易
 - ホジキンとハクスレイが，(現象論的) モデルを提案 (1952)
⇒ ホジキン・ハクスレイ方程式
⇒ ノーベル医学生理学賞

ホジキンハクスレイ方程式

- ヤリイカ巨大軸索の電気生理学的特性を再現

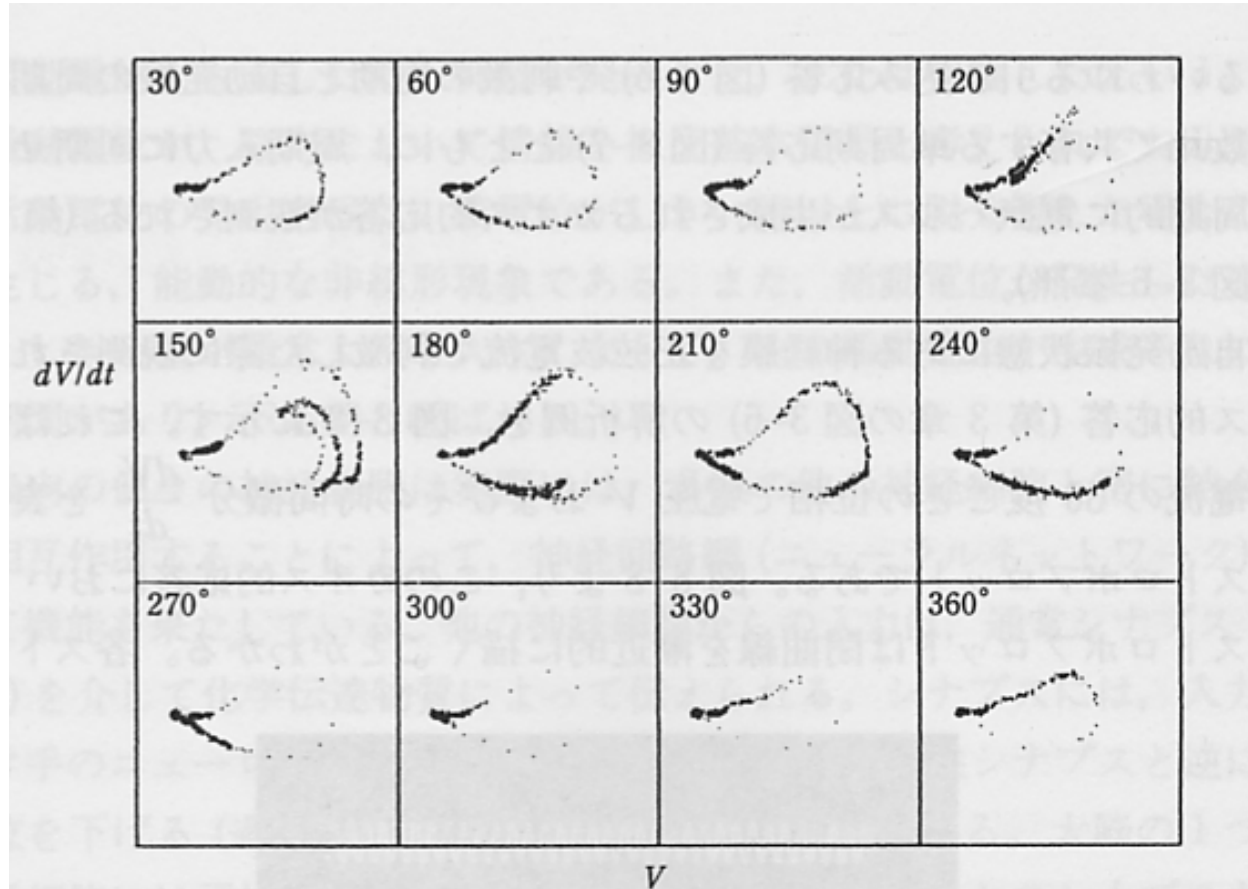
$$\left\{ \begin{array}{l} C \frac{dV}{dt} = I - \bar{g}_{\text{Na}} m^3 h (V - V_{\text{Na}}) - \bar{g}_{\text{K}} n^4 (V - V_{\text{K}}) - g_{\text{L}} (V - V_{\text{L}}) \\ \frac{dm}{dt} = \alpha_m(V)(1 - m) - \beta_m(V)m \\ \frac{dh}{dt} = \alpha_h(V)(1 - h) - \beta_h(V)h \\ \frac{dn}{dt} = \alpha_n(V)(1 - n) - \beta_n(V)n \end{array} \right.$$

$$\bar{g}_{\text{Na}} = 120.0, \bar{g}_{\text{K}} = 36, g_{\text{L}} = 0.24,$$

$$V_{\text{Na}} = +55, V_{\text{K}} = -72, V_{\text{L}} = -49.387$$

$$I = I_0 + A \sin 2\pi f t$$

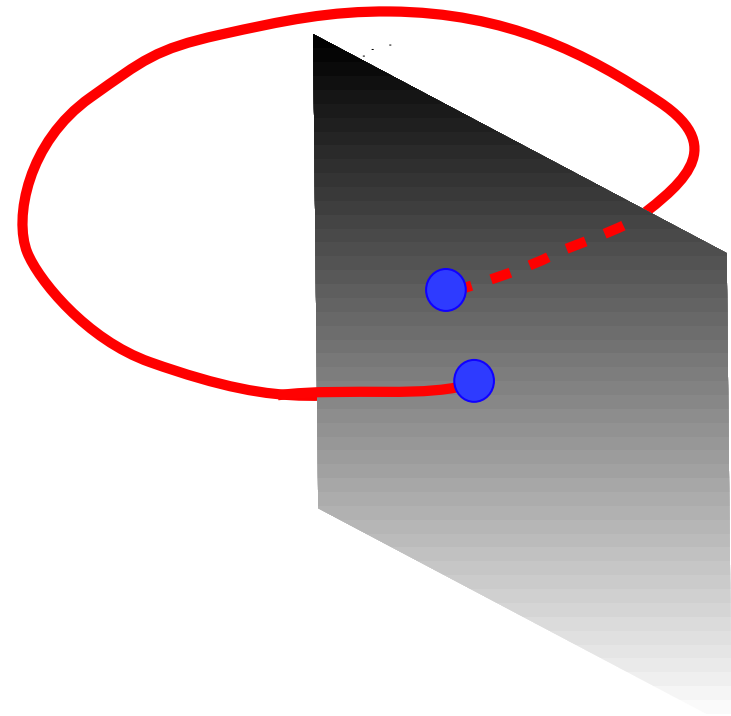
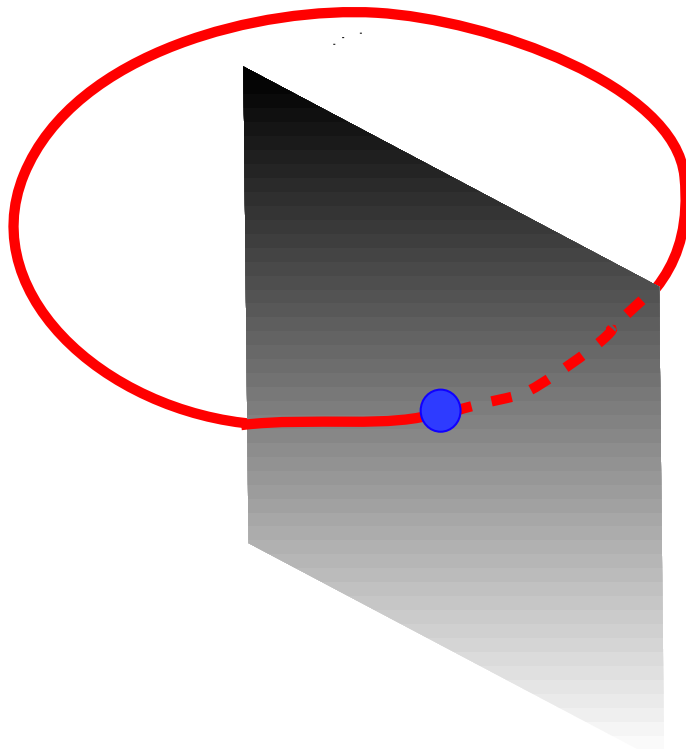
ヤリイカ巨大軸索のカオス



- 軸索を正弦波電流で刺激
- 各図は，刺激電流の位相におけるポアンカレセクション

ポアンカレセクション (切断面)

- N 次元連続時間力学系と $N - 1$ 次元離散時間力学系を結び付ける



ポアンカレセクション (切断面)

- N 次元連続時間力学系と $N - 1$ 次元離散時間力学系を結び付ける
- N 次元状態空間内の解軌道と横断的に交わる $(N - 1)$ 次元のなめらかな多様体 (= ポアンカレ切断面 Σ) を考える
- Σ 上の微分同相写像 = ポアンカレ写像
- ポアンカレ写像 P と連続時間力学系の解との関係

$$P(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}, \tau(\mathbf{x}))$$

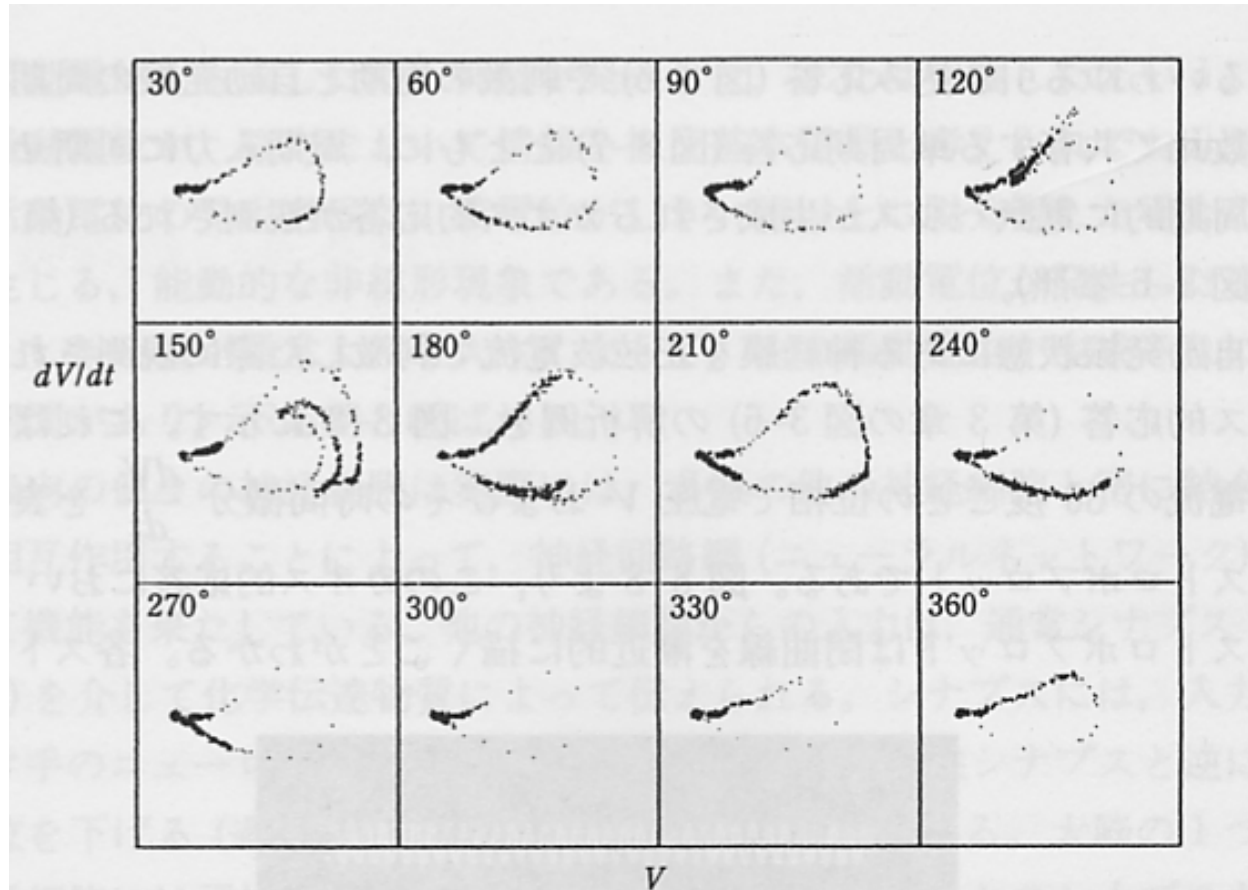
- リミットサイクル \Leftrightarrow ポアンカレ写像の不動点

$$P(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$$

- トーラス \Leftrightarrow ポアンカレ断面上のある閉曲線を稠密に埋める

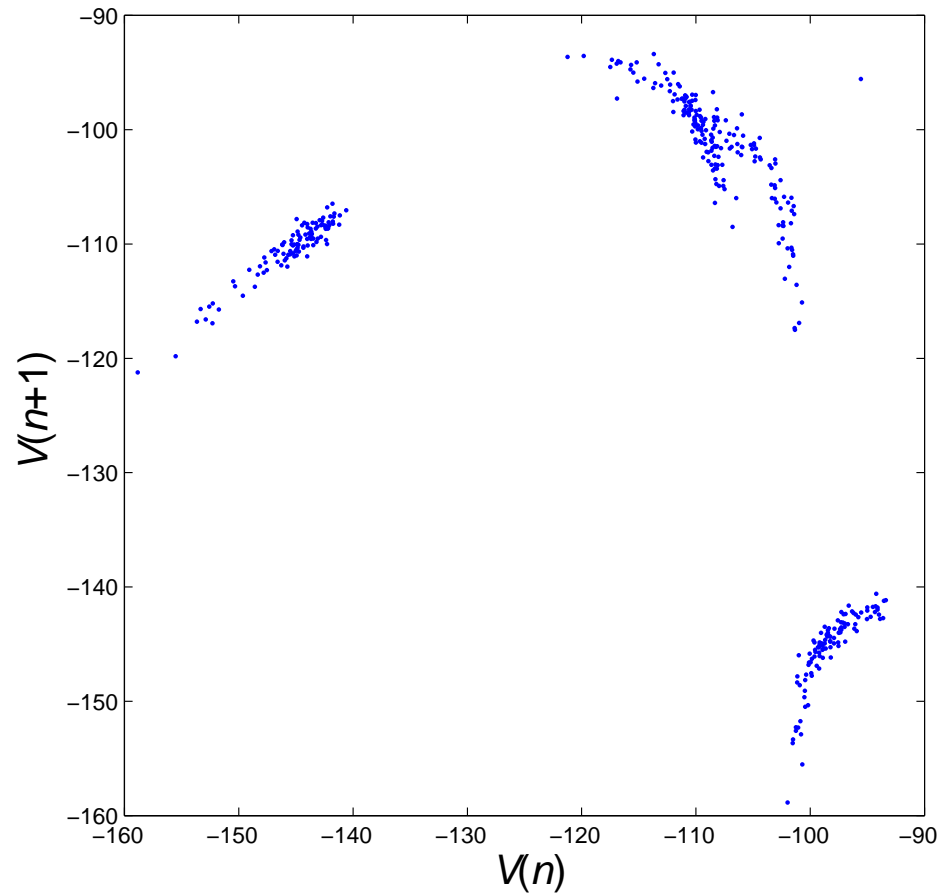
非自律系のポアンカレセクション

ヤリイカ巨大軸索のカオス



- 軸索を正弦波電流で刺激
- 刺激電流の位相におけるポアンカレセクション

ヤリイカ巨大軸索と1次元写像



- 軸索をパルス電流刺激
- 刺激電流の立ち上がりでサンプリング

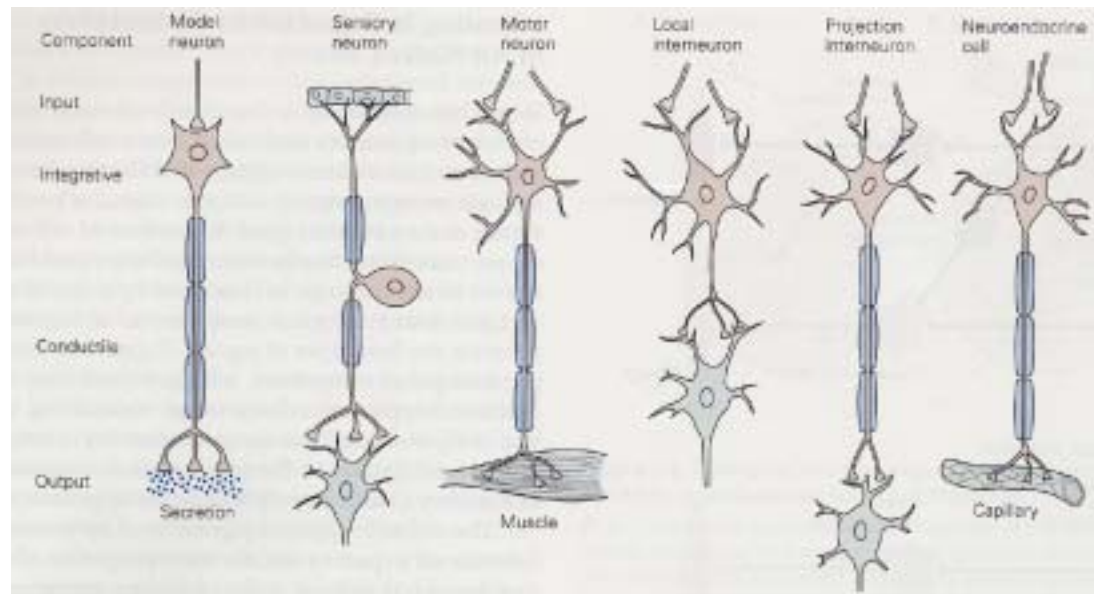
ニューロコンピューティング

- ヤリイカ巨大軸索やそれを (現象論的に) モデル化した Hodgkin – Huxley 方程式
⇒ 1次元写像で近似的に表現できる
- この後にはネットワーク化したい
- できればシンプルにもしたい
- あまりにヤリイカに依存したモデルを作っても、まずい場合もある。
- 過去の源流は ...
 - McCulloch – Pitts のモデル
 - Caianiello のモデル

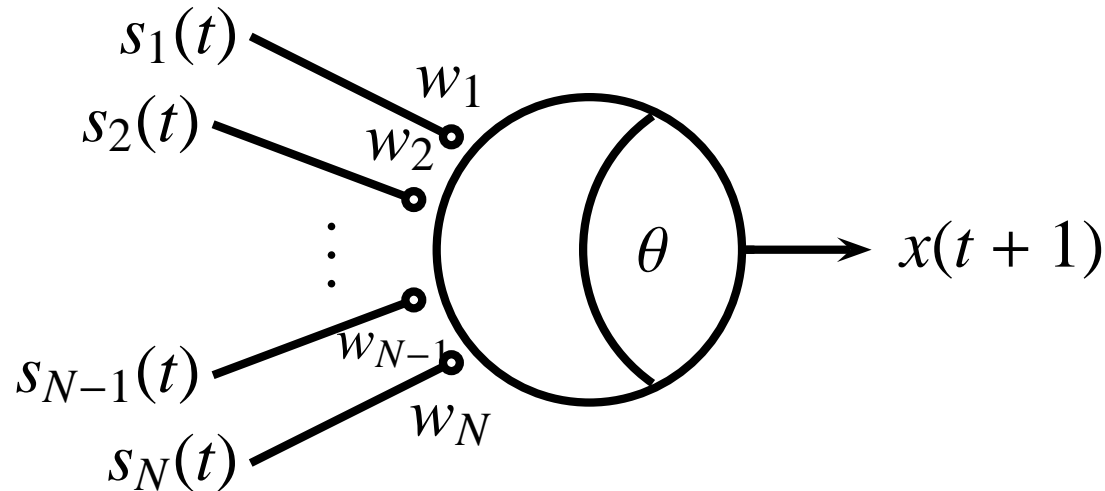
ニューロンの構造

● ニューロンの有する主要な機能

1. 入力を受ける
2. 積分
3. 伝送
4. 出力を伝える



McCulloch & Pitts のニューロンモデル, 1943



$$x(t+1) = 1 \left[\sum_{i=1}^N w_i s_i(t) - \theta \right] \text{ 但し } t \in \mathbb{Z}^+$$

● $x, s_i = \begin{cases} 1 & : \text{発火} \\ 0 & : \text{非発火 (静止)} \end{cases}$

● $1[u]$: ヘビサイドのステップ関数

McCulloch & Pitts のニューロンモデル, 1943

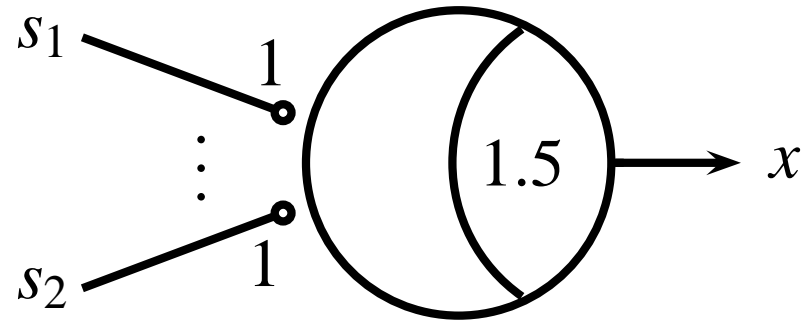
$$x(t+1) = 1 \left[\sum_{i=1}^N w_i s_i(t) - \theta \right] \text{ 但し } t \in \mathbb{Z}^+$$

- $x, s_i = \begin{cases} 1 & : \text{発火} \\ 0 & : \text{非発火 (静止)} \end{cases}$
- $1[u]$: ヘビサイドのステップ関数
- $\begin{cases} w_i > 0 & : \text{興奮性} \\ w_i < 0 & : \text{抑制性} \end{cases}$
- 拡張された (アナログ) 多数決
- 論理素子として万能

MPモデルによる論理素子の構成

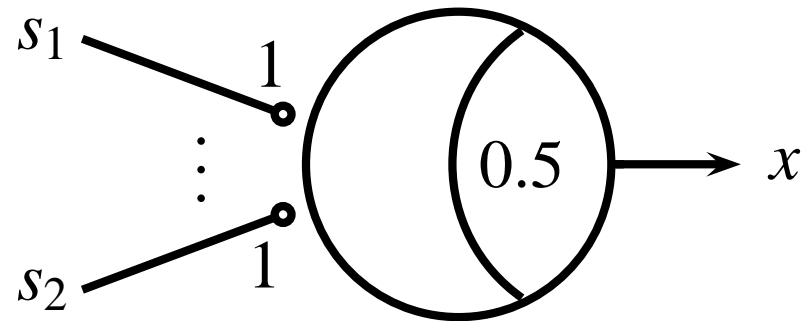
AND

s_1	s_2	x
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



OR

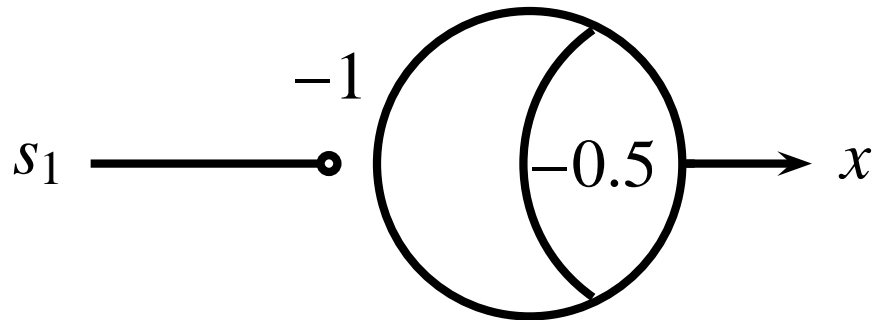
s_1	s_2	x
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



MPモデルによる論理素子の構成

● NOT

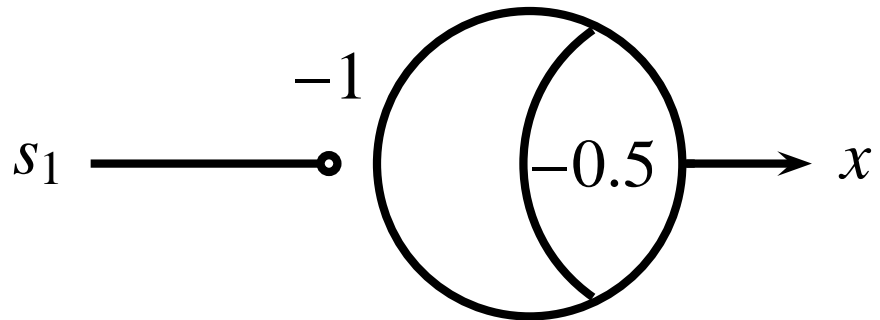
s_1	x
0	0
0	1



MPモデルによる論理素子の構成

● NOT

s_1	x
0	0
0	1



- 1943 当時は，脳が論理的動作をしていると考えられていた．McCulloch & Pitts はそれを示したかったと考えられている．

Caianiello のモデル

- MP モデルは空間的加算のみ
- 時間的加算も考慮

$$x(t+1) = 1 \left[\sum_{i=1}^N \sum_{r=0}^t T_i^{(r)} s_i(t-r) - \theta \right]$$

- $$\sum_{r=0}^t T_i^{(r)} s_i(t-r) = T_i^{(0)} s_i(t) + T_i^{(1)} s_i(t-1) + \cdots + T_i^{(t)} s_i(0)$$

- 例えば $T_i^{(r)} = k_i^r, 0 < k < 1$ とすると

$$\sum_{r=0}^t k_i^r s_i(t-r) = k_i^0 s_i(t) + k_i^1 s_i(t-1) + k_i^2 s_i(t-2) + \cdots + k_i^t s_i(0)$$

ニューロンモデル

● McCulloch & Pitts モデル

$$x(t + 1) = 1 \left[\sum_{i=1}^N w_i s_i(t) - \theta \right]$$

● Caianiello のモデル

$$x(t + 1) = 1 \left[\sum_{i=1}^N \sum_{r=0}^t T_i^{(r)} s_i(t - r) - \theta \right]$$

南雲-佐藤ニューロン

不応性を有するニューロンモデル

発火した直後は、発火しにくくなる性質

- 南雲-佐藤ニューロンモデル (Nagumo & Sato, 1972)

$$x(t + 1) = u \left[A(t) - \alpha \sum_{d=0}^t k^d x(t - d) - \theta \right]$$

k : 不応性の減衰定数

$\alpha (> 0)$: 不応性の強度

$A(t)$: ニューロンへの入力

θ : 閾値

$u(\cdot)$: 出力 (活性化) 関数 \Rightarrow ステップ関数

南雲-佐藤ニューロンの不応性

$$x(t+1) = u \left[A(t) - \alpha \sum_{d=0}^t k^d x(t-d) - \theta \right] = u[y(t+1)]$$

$$\begin{aligned} y(t+1) &= A(t) - \alpha \{ k^0 x(t) + k^1 x(t-1) + \dots + k^{t-1} x(1) + k^t x(0) \} - \theta \\ &= A(t) - \alpha \{ x(t) + k^1 x(t-1) + \dots + k^{t-1} x(1) + k^t x(0) \} - \theta \end{aligned}$$

南雲-佐藤ニューロンの不応性

$$x(t+1) = u \left[A(t) - \alpha \sum_{d=0}^t k^d x(t-d) - \theta \right] = u[y(t+1)]$$

$$\begin{aligned} y(t+1) &= A(t) - \alpha \{ k^0 x(t) + k^1 x(t-1) + \dots + k^{t-1} x(1) + k^t x(0) \} - \theta \\ &= A(t) - \alpha \{ x(t) + k^1 x(t-1) + \dots + k^{t-1} x(1) + k^t x(0) \} - \theta \end{aligned}$$



過去の発火情報が次時刻の発火に影響を与える

南雲-佐藤ニューロンの不応性

$$x(t+1) = u \left[A(t) - \alpha \sum_{d=0}^t k^d x(t-d) - \theta \right] = u[y(t+1)]$$

$$\begin{aligned} y(t+1) &= A(t) - \alpha \{ k^0 x(t) + k^1 x(t-1) + \dots + k^{t-1} x(1) + k^t x(0) \} - \theta \\ &= A(t) - \alpha \{ x(t) + k^1 x(t-1) + \dots + k^{t-1} x(1) + k^t x(0) \} - \theta \end{aligned}$$



過去の発火情報が次時刻の発火に影響を与える



$0 < k < 1, \alpha > 0$ とすれば,
過去に発火すれば, 次時刻は発火しにくい \iff 不応性

南雲-佐藤ニューロンと1次元写像

$$x(t+1) = u \left[A(t) - \alpha \sum_{d=0}^t k^d x(t-d) - \theta \right]$$

において,

$$y(t+1) = A(t) - \alpha \sum_{d=0}^t k^d x(t-d) - \theta$$

とおくと,

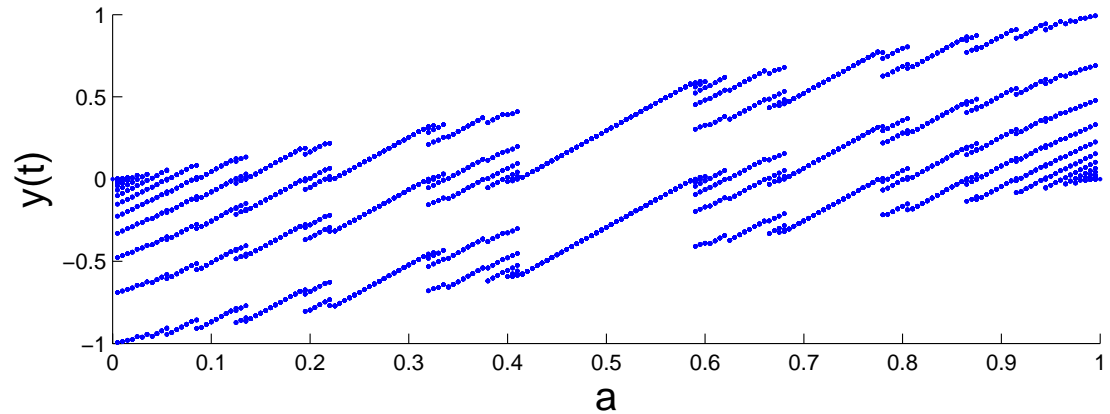
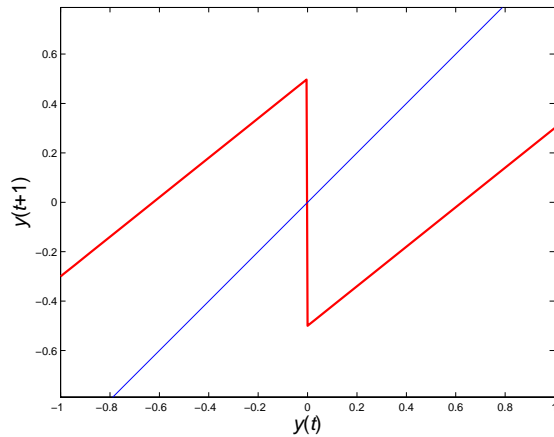
$$y(t+1) = ky(t) - \alpha u[y(t)] + (A(t) - \theta)(1 - k)$$

となる. $A(t) = A(\text{一定})$ とすると $a = (A - \theta)(1 - k)$

$$y(t+1) = ky(t) - \alpha u[y(t)] + a \quad \text{1次元写像}$$

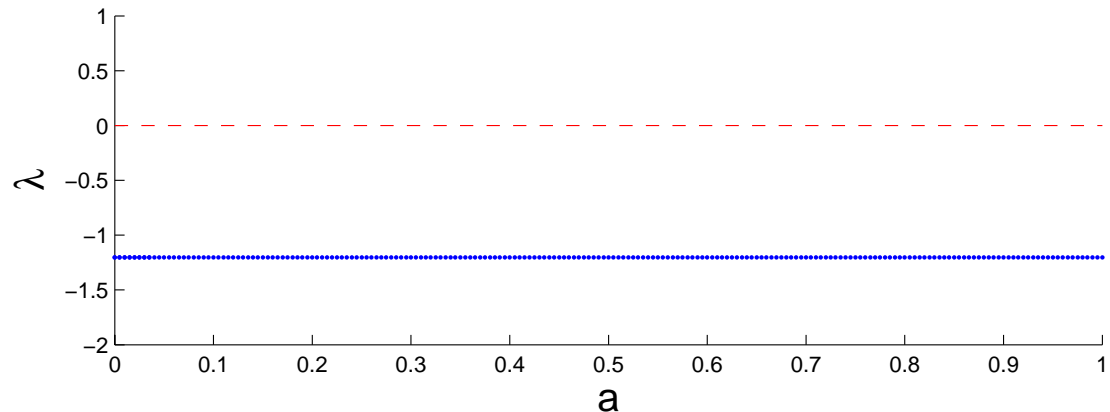
南雲-佐藤ニューロンの応答特性

$$y(t+1) = ky(t) - \alpha u[y(t)] + a = F(y(t)), t \in \mathbb{Z}$$



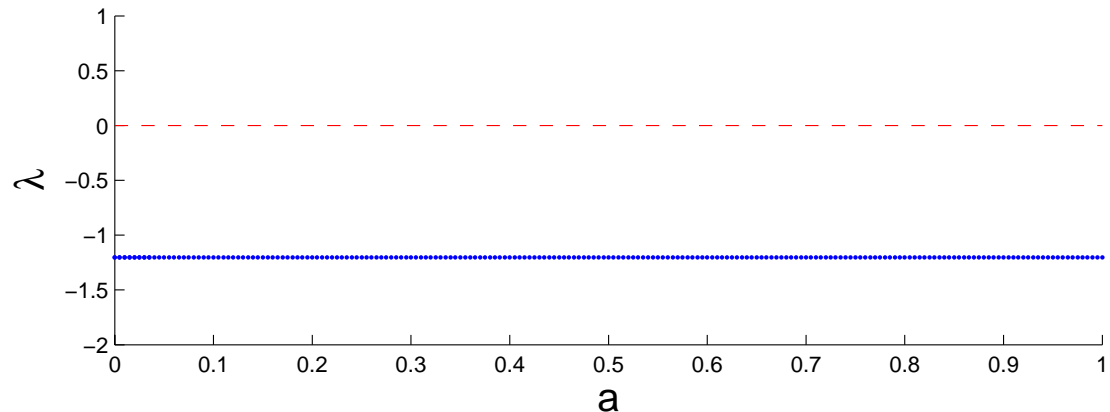
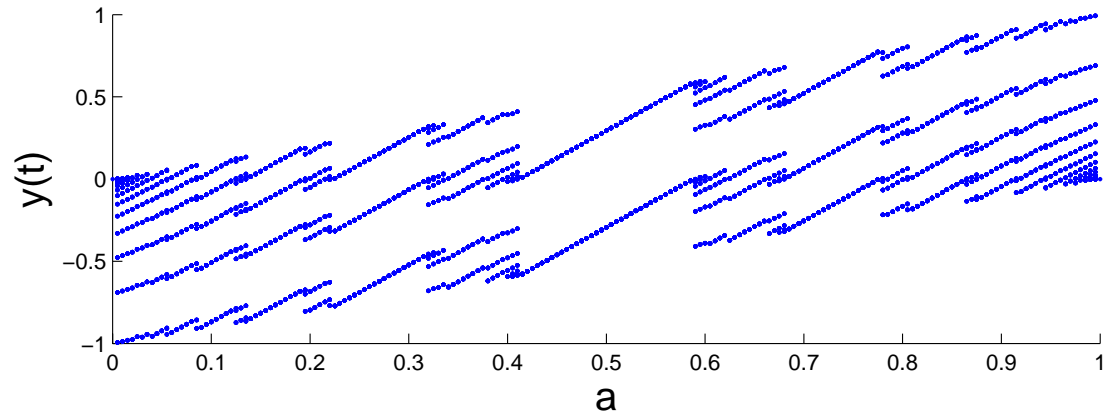
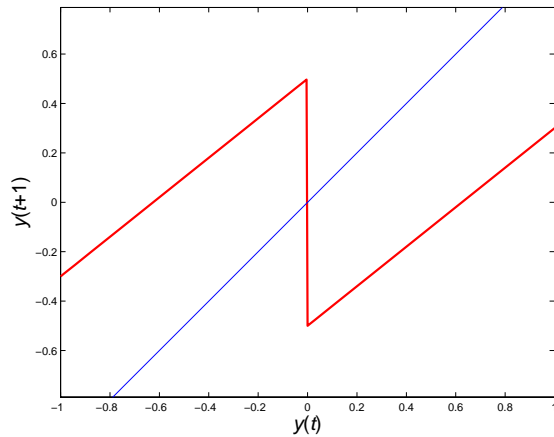
リアプノフ指数

$$\lambda = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{t=0}^{L-1} \log \left| \frac{dF(y(t))}{dy(t)} \right|$$



南雲-佐藤ニューロンの応答特性

$$y(t+1) = ky(t) - \alpha u[y(t)] + a = F(y(t)), t \in \mathbb{Z}$$

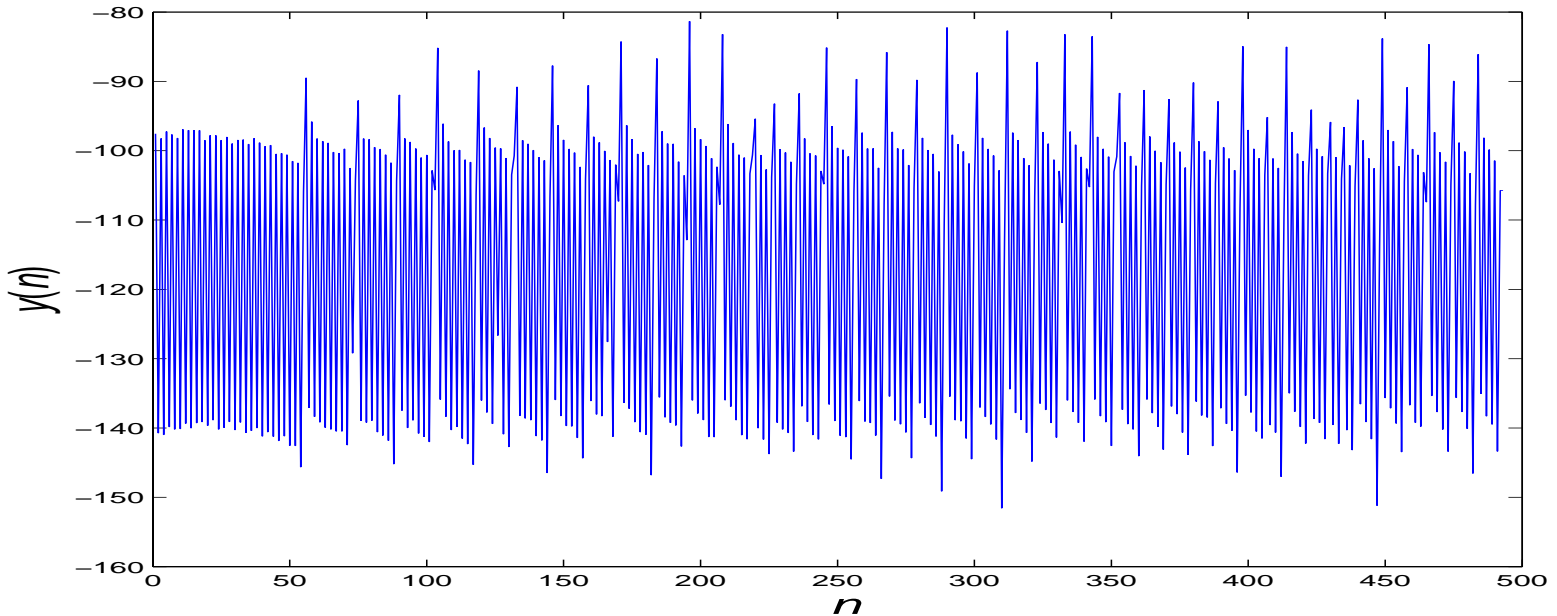


リアプノフ指数

$$\lambda = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{t=0}^{L-1} \log \left| \frac{dF(y(t))}{dy(t)} \right|$$

南雲-佐藤ニューロンモデルではカオス応答を再現できない

ヤリイカ巨大軸索におけるカオス



- 南雲-佐藤ニューロンモデルではカオス応答を再現できない
- 実際のニューロンでは, カオス応答が観測されている.

カオスダイナミクスを創り出す

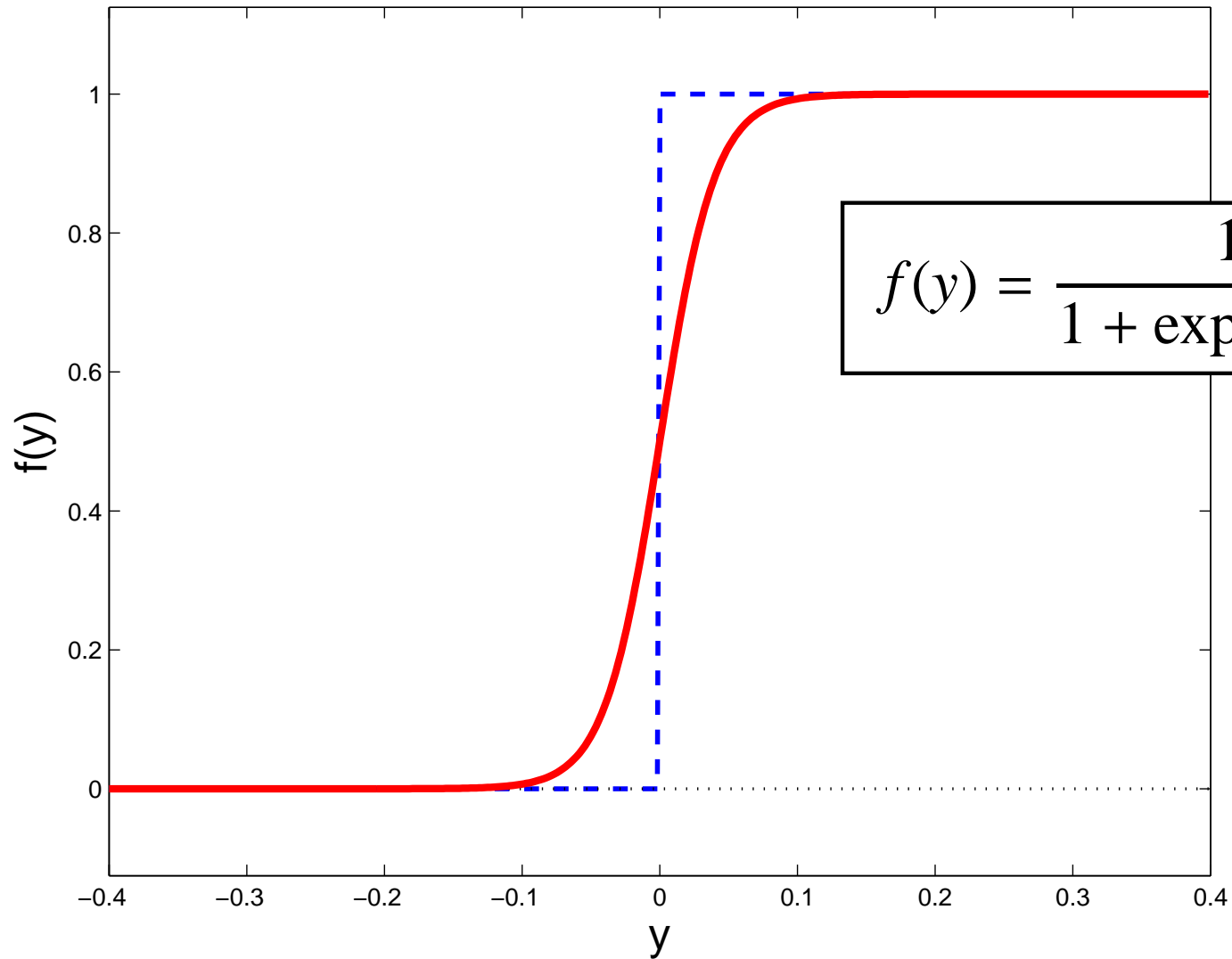
不応性を有するニューロンモデル

- 南雲-佐藤ニューロンモデル \Rightarrow カオス応答再現不能
- カオスニューロン (Aihara, Takabe, Toyoda, 1990)

$$x(t+1) = f \left[A(t) - \alpha \sum_{d=0}^t k^d g\{x(t-d)\} - \theta \right]$$

- k : 不応性の減衰定数
 $\alpha(> 0)$: 不応性の強度
 $A(t)$: ニューロンへの入力
 θ : 閾値
 $f(\cdot)$: 出力 (活性化) 関数 \Rightarrow シグモイド関数

ステップ関数とシグモイド関数



カオスニューロンと1次元写像

$$x(t+1) = f \left[A(t) - \alpha \sum_{d=0}^t k^d x(t-d) - \theta \right]$$

において,

$$y(t+1) = A(t) - \alpha \sum_{d=0}^t k^d x(t-d) - \theta$$

とおくと,

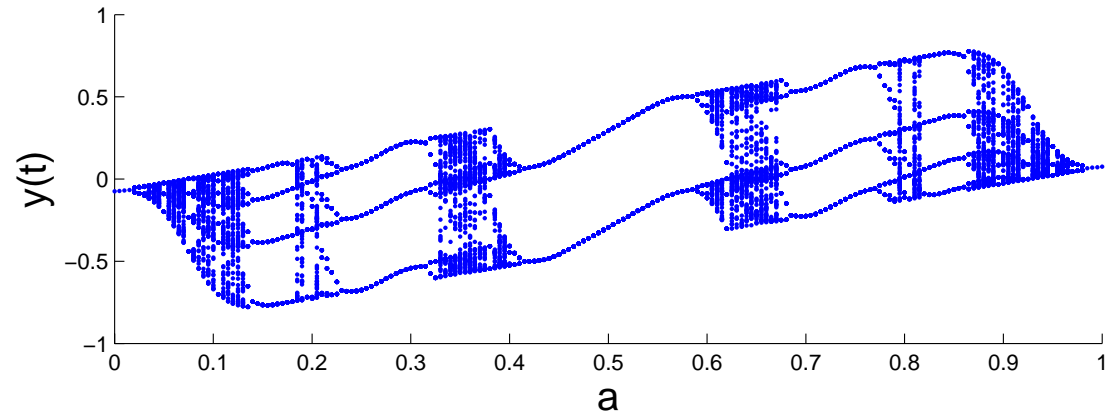
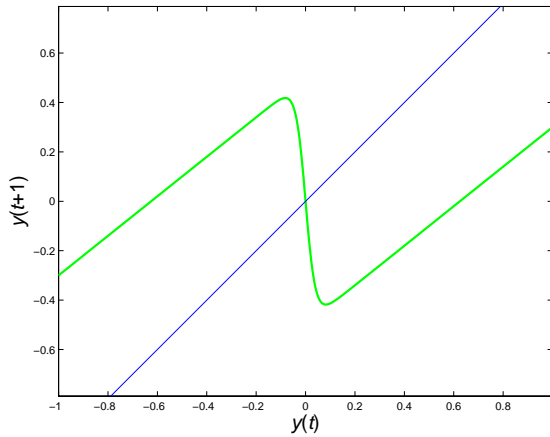
$$y(t+1) = ky(t) - \alpha u[y(t)] + (A(t) - \theta)(1 - k)$$

となる. $A(t) = A(\text{一定})$ とすると $a = (A - \theta)(1 - k)$

$$y(t+1) = ky(t) - \alpha f[y(t)] + a \quad \text{1次元写像}$$

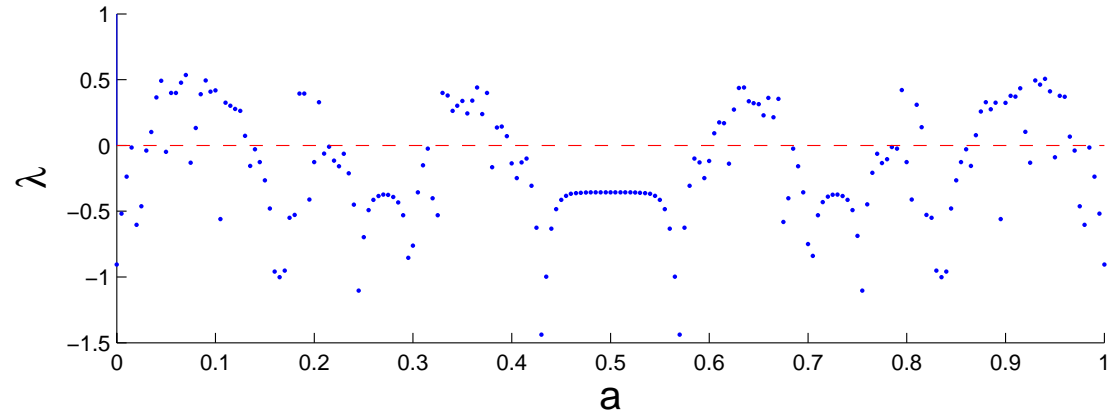
カオスニューロンの応答特性

$$y(t+1) = ky(t) - \alpha f[y(t)] + a = F(y(t)), t \in \mathbb{Z}$$



リアプノフ指数

$$\lambda = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{t=0}^{L-1} \log \left| \frac{dF(y(t))}{dy(t)} \right|$$



ニューラルネットワークの構築

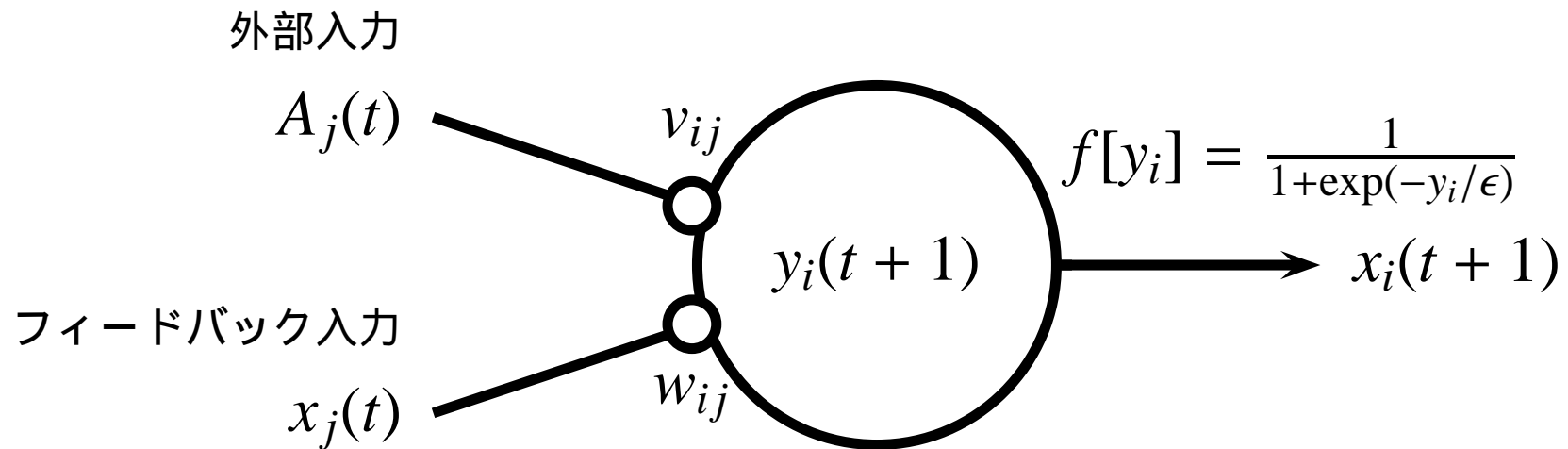
- (ある) ニューロンモデルを用いて, ニューラルネットワークを構成する際に重要な2つの結合形態

1. 相互結合
2. 層状結合



1. そのニューロンと同じニューラルネットワークからの入力 → フィードバック入力
2. そのニューロンと異なるニューラルネットワークからの入力 → 外部入力

カオスニューラルネットワーク



$$x_i(t+1) = f \left[\sum_j^M v_{ij} \sum_{d=0}^t k_s^d A_j(t-d) + \sum_j^N w_{ij} \sum_{d=0}^t k_m^d x_j(t-d) - \alpha \sum_{d=0}^t k_r^d x_i(t-d) - \theta_i \right]$$

カオスニューラルネットワーク

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_i(t+1) = \sum_{j=1}^M v_{ij} \sum_{d=0}^t k_s^d A_j(t-d) \\ \eta_i(t+1) = \sum_{j=1}^N w_{ij} \sum_{d=0}^t k_m^d x_j(t-d) \\ \zeta_i(t+1) = -\alpha \sum_{d=0}^t k_r^d x_i(t-d) - \theta_i \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \xi_i(t+1) = k_s \xi_i(t) + \sum_{j=1}^M v_{ij} A_j(t) \\ \eta_i(t+1) = k_m \eta_i(t) + \sum_{j=1}^N w_{ij} x_j(t) \\ \zeta_i(t+1) = k_r \zeta_i(t) - \alpha x_i(t) - \theta_i \end{array} \right.$$

他のニューラルネットワークとの関係

出力関数	ステップ関数	シグモイド関数
$k = \alpha = 0$	McCulloch-Pitts 形式ニューロンモデル	Analog-Neuron Back Propagation
$k \neq 0, \alpha \neq 0$	Nagumo-Sato ニューロンモデル	Chaotic Neuron

- カオスニューラルネットワークの
 - パラメータ
 - 出力関数 (活性化関数)

を変化させることで、他のタイプのニューロンモデルを再現可能

カオスニューラルネットワークの応用

- (動的な) 連想記憶
- 組み合わせ最適化問題