ニューラルシステムにおけるカオス

非線形システム特論

池口 徹

埼玉大学 大学院 理工学研究科 情報数理科学専攻

338–8570 さいたま市 桜区 下大久保 255

Tel : 048–858–3577, Fax : 048–858–3716

Email : tohru@ics.saitama-u.ac.jp

URL : http://www.nls.ics.saitama-u.ac.jp/˜tohru

内容

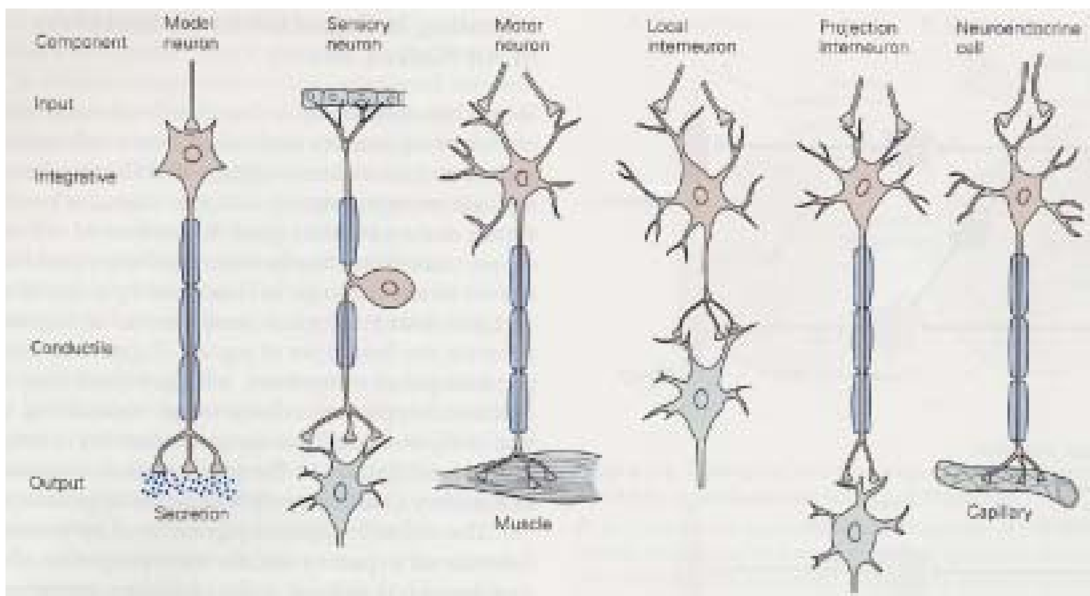
ニューロコンピューティング

- ヤリイカ巨大軸索やそれを (現象論的に) モデル化した Hodgkin – Huxley 方程式
  ⇒ 1 次元写像で近似的に表現できる
- この後にはネットワーク化したい
- できればシンプルにもしたい
- あまりにヤリイカに依存したモデルを作っても，まずい場合もある．
- 過去の源流は...
  - McCulloh – Pitts のモデル
  - Caianiello のモデル

ニューロンの構造

◀ ニューロンの有する主要な機能

1. 入力を受ける
2. 積分
3. 伝送
4. 出力を伝える



ニューロンモデル

- McCulloch & Pitts モデル

$$x(t+1) = 1\left[\sum_{i=1}^{N} w_i s_i(t) - \theta\right]$$

- Caianiello のモデル

$$x(t+1) = 1\left[\sum_{i=1}^{N} \sum_{r=0}^{t} T_i^{(r)} s_i(t-r) - \theta\right]$$

南雲–佐藤ニューロン

不応性を有するニューロンモデル

発火した直後は，発火しにくくなる性質

◀ 南雲–佐藤ニューロンモデル (Nagumo & Sato, 1972)

$$x(t+1) = u\left[A(t) - \alpha \sum_{d=0}^{t} k^d x(t-d) - \theta\right]$$

k	：	不応性の減衰定数
$\alpha(>0)$	：	不応性の強度
$A(t)$	：	ニューロンへの入力
θ	：	閾値
$u(\cdot)$	：	出力 (活性化) 関数 $\Rightarrow$ ステップ関数

南雲–佐藤ニューロンの不応性

$$
\begin{aligned}
x(t+1) &= u\left[A(t) - \alpha \sum_{d=0}^{t} k^d x(t-d) - \theta\right] = u\left[y(t+1)\right] \\
y(t+1) &= A(t) - \alpha\left\{k^0 x(t) + k^1 x(t-1) + \cdots + k^{t-1} x(1) + k^t x(0)\right\} - \theta \\
&= A(t) - \alpha\left\{x(t) + k^1 x(t-1) + \cdots + k^{t-1} x(1) + k^t x(0)\right\} - \theta
\end{aligned}
$$

南雲–佐藤ニューロンの不応性

$$
\begin{aligned}
x(t+1) &= u\left[A(t) - \alpha \sum_{d=0}^{t} k^d x(t-d) - \theta\right] = u\left[y(t+1)\right] \\
y(t+1) &= A(t) - \alpha\left\{k^0 x(t) + k^1 x(t-1) + \cdots + k^{t-1} x(1) + k^t x(0)\right\} - \theta \\
&= A(t) - \alpha\left\{x(t) + k^1 x(t-1) + \cdots + k^{t-1} x(1) + k^t x(0)\right\} - \theta
\end{aligned}
$$

$$\Downarrow$$

過去の発火情報が次時刻の発火に影響を与える

南雲–佐藤ニューロンの不応性

$$x(t+1) = u\left[A(t) - \alpha \sum_{d=0}^{t} k^d x(t-d) - \theta\right] = u\left[y(t+1)\right]$$

$$\begin{aligned} y(t+1) &= A(t) - \alpha\left\{k^0 x(t) + k^1 x(t-1) + \cdots + k^{t-1} x(1) + k^t x(0)\right\} - \theta \\ &= A(t) - \alpha\left\{x(t) + k^1 x(t-1) + \cdots + k^{t-1} x(1) + k^t x(0)\right\} - \theta \end{aligned}$$

↓

過去の発火情報が次時刻の発火に影響を与える

↓

$0 < k < 1, \alpha > 0$ とすれば,
過去に発火すれば，次時刻は発火しにくい $\Longleftrightarrow$ 不応性

南雲–佐藤ニューロンと1次元写像

$$x(t+1) = u\left[A(t) - \alpha \sum_{d=0}^{t} k^d x(t-d) - \theta\right]$$

において，

$$y(t+1) = A(t) - \alpha \sum_{d=0}^{t} k^d x(t-d) - \theta$$

とおくと，

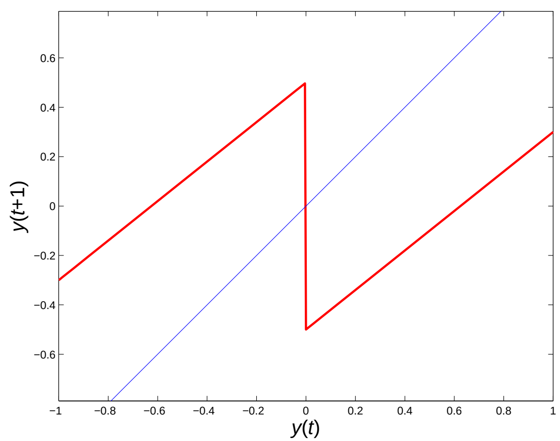
$$y(t+1) = ky(t) - \alpha u[y(t)] + (A(t) - \theta)(1 - k)$$

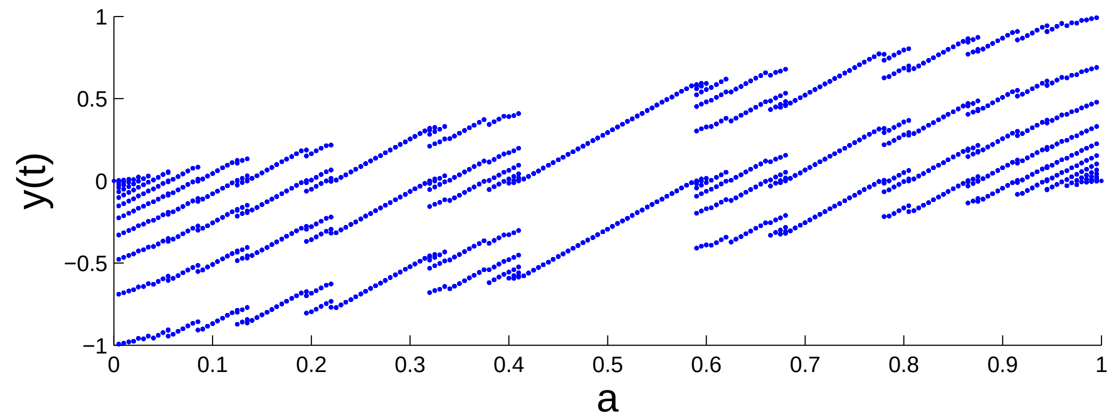
となる． $A(t) = A(\text{一定})$ とすると $a = (A - \theta)(1 - k)$

$$y(t+1) = ky(t) - \alpha u[y(t)] + a \quad \text{1次元写像}$$

南雲–佐藤ニューロンの応答特性

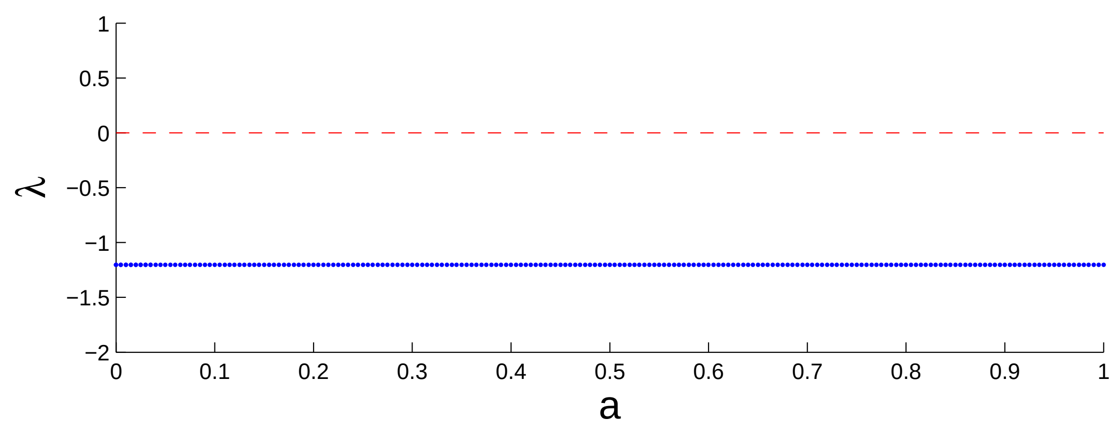
$$y(t+1) = ky(t) - \alpha u[y(t)] + a = F(y(t)), t \in \mathbb{Z}$$





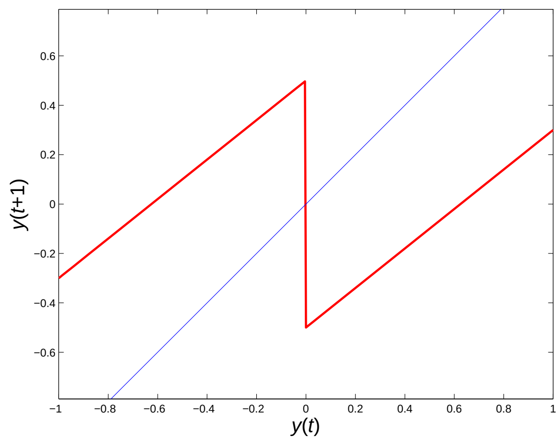
リアプノフ指数

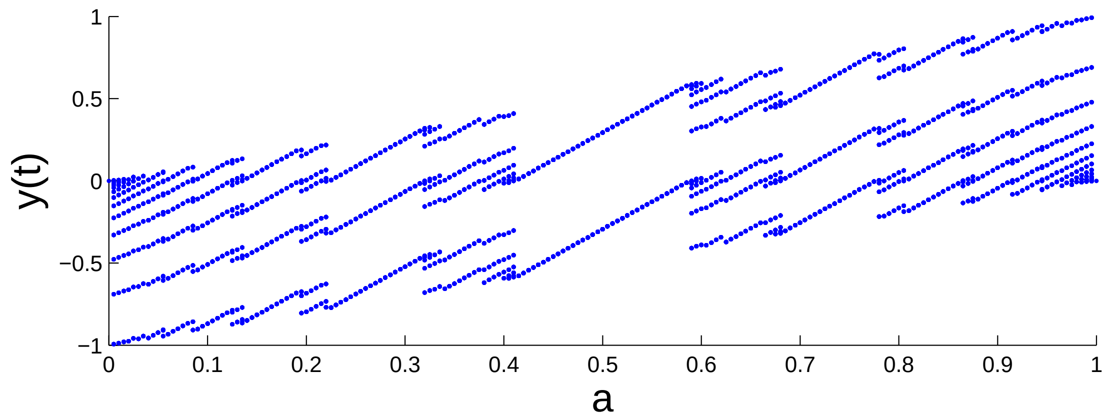
$$\lambda = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{L} \sum_{t=0}^{L-1} \log \left| \frac{\mathrm{d}F(y(t))}{\mathrm{d}y(t)} \right|$$



南雲–佐藤ニューロンの応答特性

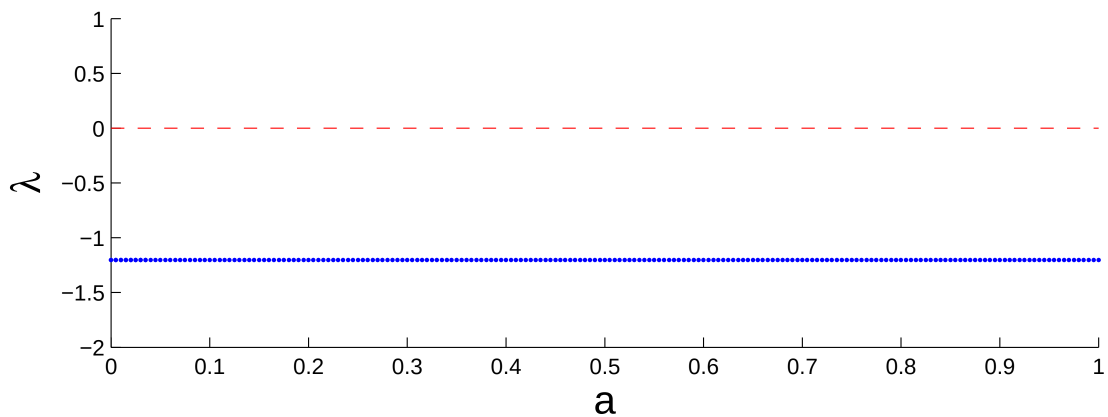
$$y(t+1) = ky(t) - \alpha u[y(t)] + a = F(y(t)), t \in \mathbb{Z}$$





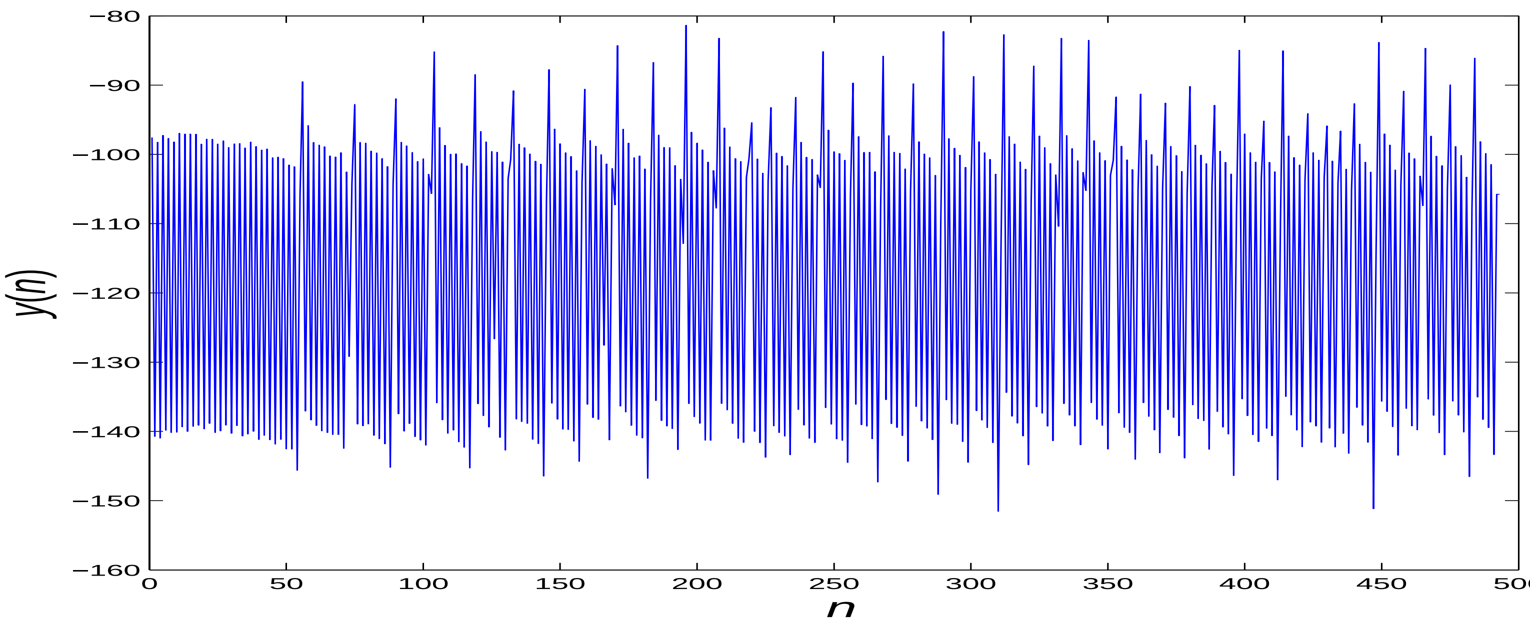
リアプノフ指数

$$\lambda = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{L} \sum_{t=0}^{L-1} \log \left| \frac{\mathrm{d}F(y(t))}{\mathrm{d}y(t)} \right|$$



南雲–佐藤ニューロンモデルではカオス応答を再現できない

ヤリイカ巨大軸索におけるカオス



◀ 南雲–佐藤ニューロンモデルではカオス応答を再現できない

◀ 実際のニューロンでは，カオス応答が観測されている．

カオスダイナミクスを創り出す

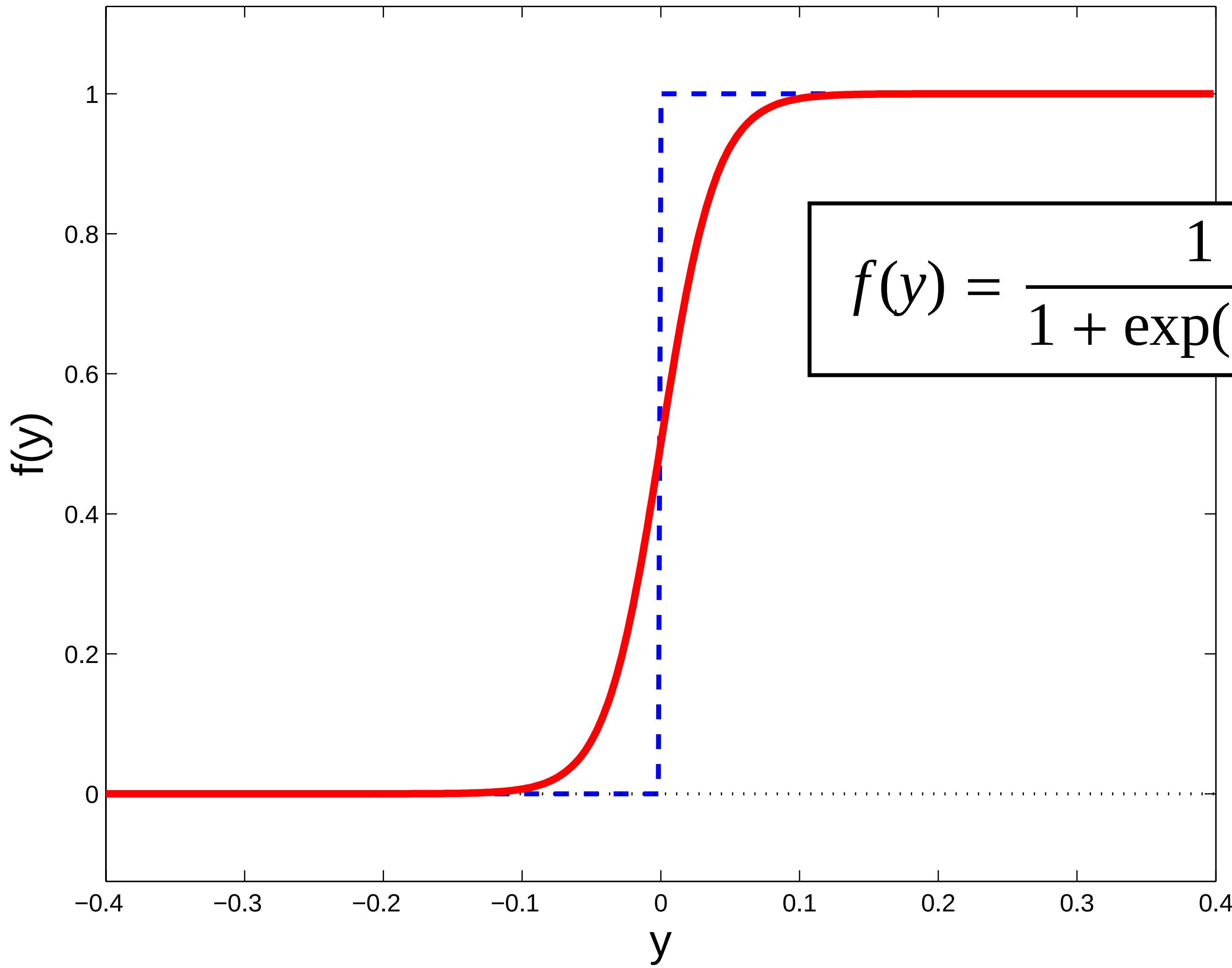
不応性を有するニューロンモデル

- 南雲–佐藤ニューロンモデル ⇒ カオス応答再現不能
- カオスニューロン (Aihara, Takabe, Toyoda, 1990)

$$x(t+1) = f\left[A(t) - \alpha \sum_{d=0}^{t} k^d g\{x(t-d)\} - \theta\right]$$

k	:	不応性の減衰定数
$\alpha(>0)$	:	不応性の強度
$A(t)$	:	ニューロンへの入力
θ	:	閾値
$f(\cdot)$	:	出力 (活性化) 関数 ⇒ シグモイド関数

ステップ関数とシグモイド関数



$$f(y) = \frac{1}{1 + \exp(-y/\epsilon)}$$

カオスニューロンと1次元写像

$$x(t+1) = f\left[A(t) - \alpha \sum_{d=0}^{t} k^d x(t-d) - \theta\right]$$

において,

$$y(t+1) = A(t) - \alpha \sum_{d=0}^{t} k^d x(t-d) - \theta$$

とおくと,

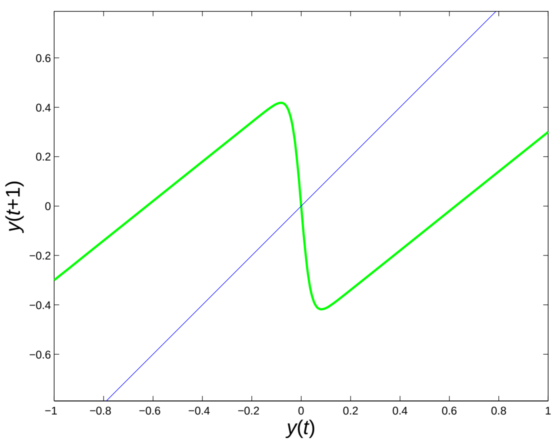
$$y(t+1) = ky(t) - \alpha u[y(t)] + (A(t) - \theta)(1-k)$$

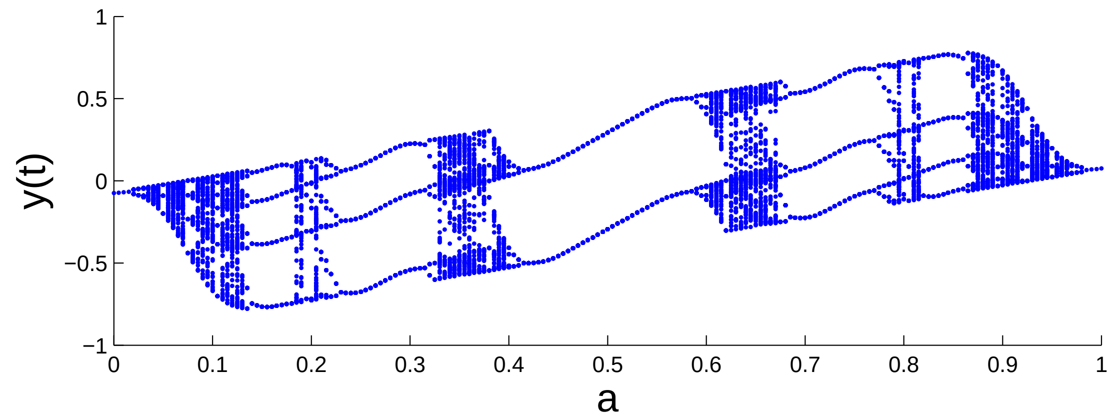
となる． $A(t) = A(一定)$ とすると $a = (A-\theta)(1-k)$

$$y(t+1) = ky(t) - \alpha f[y(t)] + a \quad \text{1次元写像}$$

カオスニューロンの応答特性

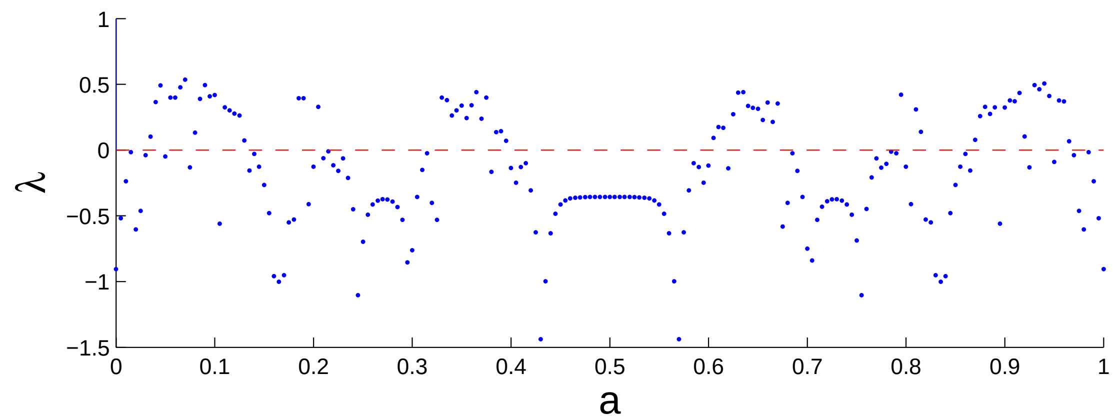
$$y(t+1) = ky(t) - \alpha f[y(t)] + a = F(y(t)), t \in \mathbb{Z}$$





リアプノフ指数

$$\lambda = \lim_{L \to \infty} \frac{1}{L} \sum_{t=0}^{L-1} \log \left| \frac{\mathrm{d}F(y(t))}{\mathrm{d}y(t)} \right|$$



ニューラルネットワークの構築

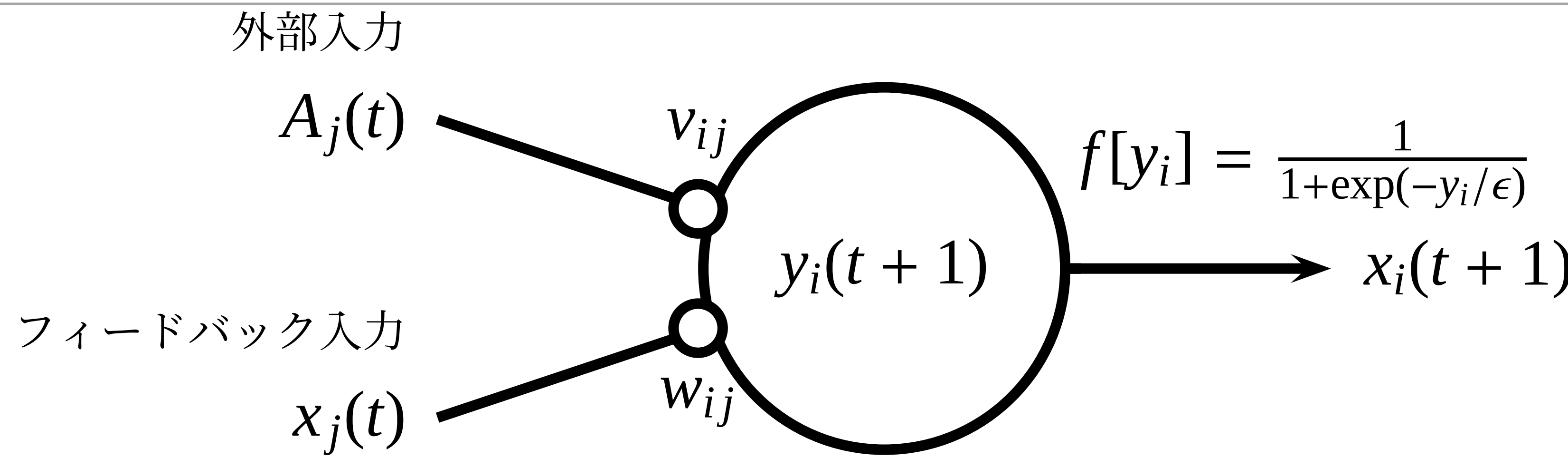
◀ (ある) ニューロンモデルを用いて，ニューラルネットワークを構成する際に重要な 2 つの結合形態

1. 相互結合
2. 層状結合

$$\Downarrow$$

1. そのニューロンと同じニューラルネットワークからの入力 $\rightarrow$ フィードバック入力
2. そのニューロンと異なるニューラルネットワークからの入力 $\rightarrow$ 外部入力

カオスニューラルネットワーク



$$
\begin{aligned}
x_i(t+1) \quad &= \quad f\Bigg[\sum_{j}^{M} v_{ij} \sum_{d=0}^{t} k_s^d A_j(t-d) \\
&+ \quad \sum_{j}^{N} w_{ij} \sum_{d=0}^{t} k_m^d x_j(t-d) - \alpha \sum_{d=0}^{t} k_r^d x_i(t-d) - \theta_i \Bigg]
\end{aligned}
$$

カオスニューラルネットワーク

$$\begin{cases} \xi_i(t+1) &= \displaystyle\sum_{j=1}^{M} v_{ij} \sum_{d=0}^{t} k_s^d A_j(t-d) \\ \eta_i(t+1) &= \displaystyle\sum_{j=1}^{N} w_{ij} \sum_{d=0}^{t} k_m^d x_j(t-d) \\ \zeta_i(t+1) &= \displaystyle -\alpha \sum_{d=0}^{t} k_r^d x_i(t-d) - \theta_i \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \xi_i(t+1) &= \displaystyle k_s \xi_i(t) + \sum_{j=1}^{M} v_{ij} A_j(t) \\ \eta_i(t+1) &= \displaystyle k_m \eta_i(t) + \sum_{j=1}^{N} w_{ij} x_j(t) \\ \zeta_i(t+1) &= k_r \zeta_i(t) - \alpha x_i(t) - \theta_i \end{cases}$$

他のニューラルネットワークとの関係

出力関数	ステップ関数	シグモイド関数
$k = \alpha = 0$	McCulloch-Pitts 形式ニューロンモデル	Analog-Neuron Back Propagation
$k \neq 0, \alpha \neq 0$	Nagumo-Satoh ニューロンモデル	Chaotic Neuron

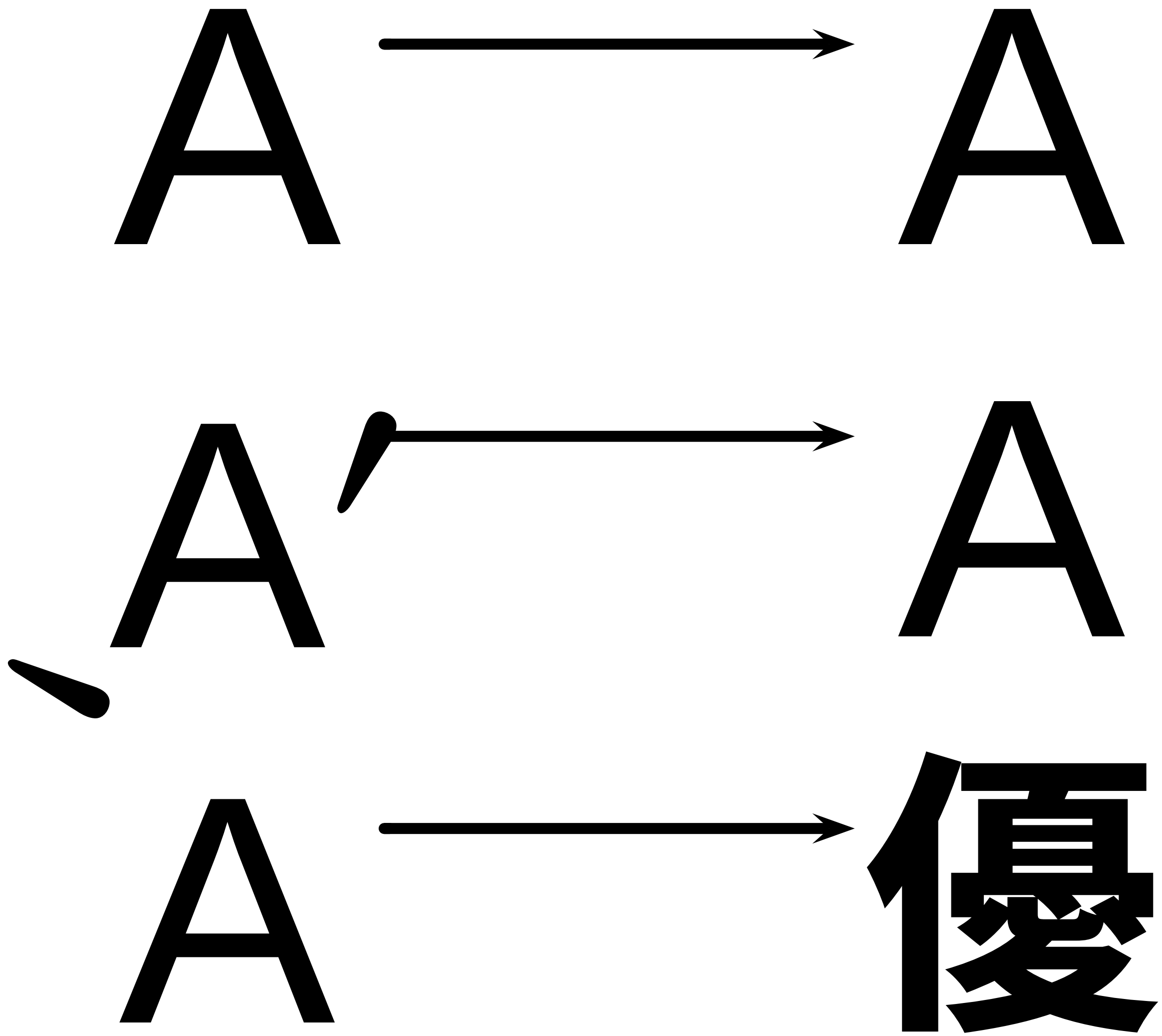
◀ カオスニューラルネットワークの
- ❏ パラメータ
- ❏ 出力関数 (活性化関数)

を変化させることで，他のタイプのニューロンモデルを再現可能

カオスニューラルネットワークの応用

- 連想記憶
  - 動的な連想記憶
  - カオス的遍歴
- 組み合わせ最適化問題
  - 巡回セールスマン問題 (TSP)
  - 2 次割り当て問題 (QAP)

連想記憶



連想記憶

- 静的な連想記憶
  Nakano, 1972; Kohonen, 1972; Anderson, 1972;
  - 自己想起
  - 相互想起
- 動的な連想記憶 ⇒ 周期系列
  Amari, 1972
- 「もっと」動的な連想記憶 ⇒ 非周期系列

相互結合型ニューラルネットのエネルギー

◀ ダイナミクス

$$x_i(t+1) = \begin{cases} 1 & \cdots \quad \sum_{j=1}^{N} w_{ij} x_j(t) > \theta_i \\ 0 & \cdots \quad \sum_{j=1}^{N} w_{ij} x_j(t) < \theta_i \end{cases}$$

- 仮定
  1. $w_{ij} = w_{ji}$
  2. $w_{ii} = 0$
- この時，以下の関数 (エネルギー) を考える．

$$E = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} w_{ij} x_i(t) x_j(t) + \sum_{i=1}^{N} \theta_i x_i(t)$$

エネルギ最小化原理

- 第 k 番目のニューロンが $x_k \to x_k + \Delta x_k$ に状態変化
- エネルギーの変化は,

$$
\begin{aligned}
\Delta E &= E(x_k + \Delta x_k) - E(x_k) \\
&= -\frac{1}{2}\Delta x_k \sum_{j=1}^{N} w_{kj} x_j - \frac{1}{2}\Delta x_k \sum_{i=1}^{N} w_{ik} x_i + \Delta x_k \theta_k \\
&= -\Delta x_k \sum_{j=1}^{N} w_{kj} x_j + \Delta x_k \theta_k = -\Delta x_k \left(\sum_{j}^{N} w_{kj} x_j - \theta_k \right)
\end{aligned}
$$

- $\begin{cases} \Delta x_k > 0 & \cdots \quad \sum_j w_{kj} x_j - \theta_k > 0 \\ \Delta x_k < 0 & \cdots \quad \sum_j w_{kj} x_j - \theta_k < 0 \end{cases}$ なので,

エネルギ最小化原理

- どのようにニューロンの状態が更新しても，

$$E \leq 0$$

となるように，ニューラルネットワークは動作する．
- ある最小化問題があって，この問題の評価関数を，このエネルギ関数の形で表現できたとする．
- ニューラルネットワークは E を減少させるように動作するので，ニューラルネットワークにより，この問題の評価関数の最小値を探索するマシンを構成できる．

連想記憶への応用

◀ n 次元ベクトル $\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \end{pmatrix}$

◀ ダイナミクス

$$x_i(t+1) = f\left\{\sum_{j=1}^{N} W_{ij} x_j(t) - \theta_i\right\}$$

◀ ダイナミクス

$$\boldsymbol{x}(t+1) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{W}\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{\theta})$$

連想記憶のダイナミクス

- ダイナミクス

$$\boldsymbol{x}(t+1) = \boldsymbol{f}(W\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{\theta})$$

- あるパターンの組 $\boldsymbol{x}_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, \cdots, m)$ を与えたときに,

$$\boldsymbol{x}_\alpha = \boldsymbol{f}(W\boldsymbol{x}_\alpha - \boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_\alpha)$$

- つまり，$\boldsymbol{x}_\alpha$ がネットワーク (離散力学系 $\boldsymbol{F}$) の安定平衡点
- 結合係数を

$$W_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \left(2x_i^{(\alpha)} - 1\right)\left(2x_j^{(\alpha)} - 1\right)$$

とすればよい $\left(\boldsymbol{x}_\alpha = \left\{x_1^{(\alpha)}, x_2^{(\alpha)}, \cdots x_N^{(\alpha)}\right\}\right)$

連想記憶のダイナミクス

◀ このような結合係数の決め方でうまく行くのは，パターンの組 $\boldsymbol{x}_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, \cdots, m)$ がお互いに直交しているとき．

$$\boldsymbol{x}_\alpha \cdot \boldsymbol{x}_\beta = N\delta_{\alpha\beta}$$

◀ 例えば $N = 16$ とすると

1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0
1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0
1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0
1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0

のようにすれば良い．

連想記憶

- 静的な連想記憶
  Nakano, 1972; Kohonen, 1972; Anderson, 1972;
  - 自己想起

$$\boldsymbol{x}_\alpha = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{W}\boldsymbol{x}_\alpha - \boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_\alpha)$$

  - 相互想起

$$\boldsymbol{y}_\alpha = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{W}\boldsymbol{x}_\alpha - \boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_\alpha)$$

- 動的な連想記憶 ⇒ 周期系列 (Amari, 1972)

$$\boldsymbol{x}_1 \longrightarrow \boldsymbol{x}_2 \longrightarrow \boldsymbol{x}_3 \longrightarrow \boldsymbol{x}_4 \longrightarrow \boldsymbol{x}_1$$

- 「もっと」動的な連想記憶 ⇒ 非周期系列

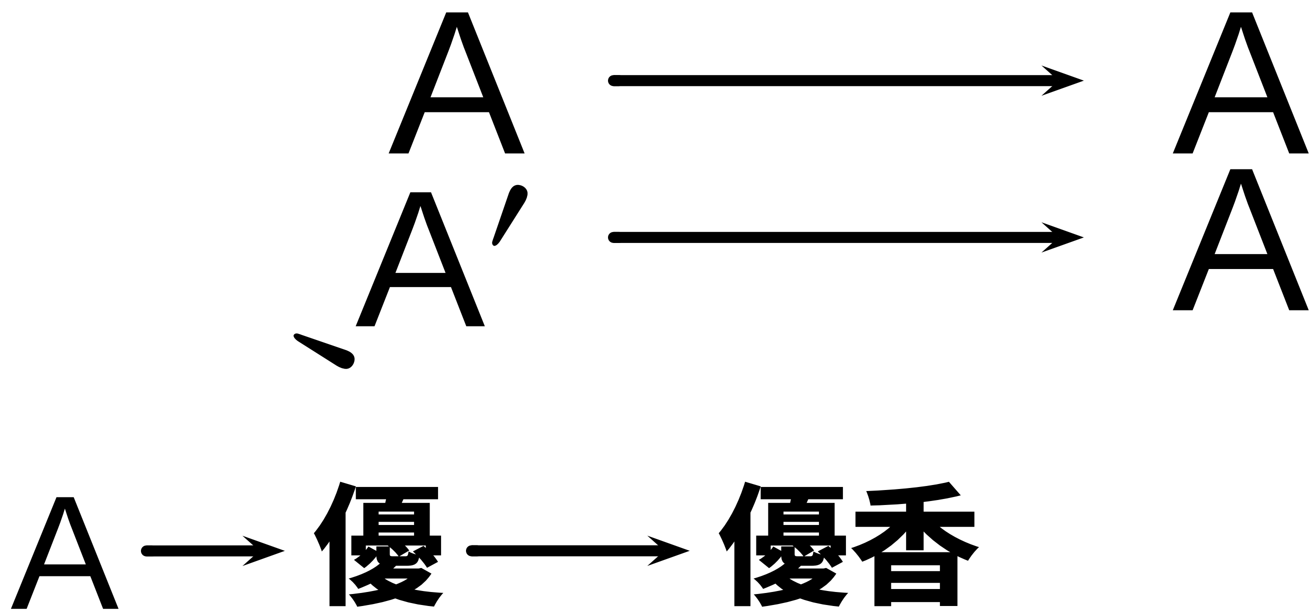
もっと動的な連想記憶

A ⟶ A

A′ ⟶ A

A → 優

もっと動的な連想記憶



もっと動的な連想記憶

A ⟶ A

A′ ⟶ A

A → 優 ⟶ 優香 ⟶ **EPSON**

もっと動的な連想記憶

A ⟶ A

A′ ⟶ A

A → 優 ⟶ 優香 ⟶ EPSON

↓

柴咲コウ

もっと動的な連想記憶

$$\mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{A}$$

$$\mathrm{A}' \longrightarrow \mathrm{A}$$

A → 優 → 優香 → EPSON

↓

木村拓哉 ← 柴咲コウ

もっと動的な連想記憶

A ⟶ A

A′ ⟶ A

A → 優 ⟶ 優香 ⟶ EPSON

↓

SMAP ← 木村拓哉 ⟵ 柴咲コウ

もっと動的な連想記憶

A ⟶ A

A′ ⟶ A

A → 優 ⟶ 優香 ⟶ EPSON

↓

SMAP ← 木村拓哉 ⟵ 柴咲コウ

↙

草彅剛

もっと動的な連想記憶

$A \longrightarrow A$

$A' \longrightarrow A$

A → 優 ⟶ 優香 ⟶ EPSON

↓

SMAP ← 木村拓哉 ⟵ 柴咲コウ

↙

草彅剛 ⟶ 韓国語

もっと動的な連想記憶

A ⟶ A

A′ ⟶ A

A → 優 ⟶ 優香 ⟶ EPSON

↓

SMAP ← 木村拓哉 ⟵ 柴咲コウ

↙

草彅剛 ⟶ 韓国語 ⟶ 盧武鉉

もっと動的な連想記憶

A ⟶ A

A′ ⟶ A

A → 優 ⟶ 優香 ⟶ EPSON

↓

SMAP ← 木村拓哉 ⟵ 柴咲コウ

↙

草彅剛 ⟶ 韓国語 ⟶ 盧武鉉 ⟶

CNNによる動的連想記憶

- カオスニューラルネットワーク
- 結合係数 W_{ij} を相関行列で決定
- リアプノフ指数などで，ダイナミクスを評価
- カオス的遍歴現象の観測

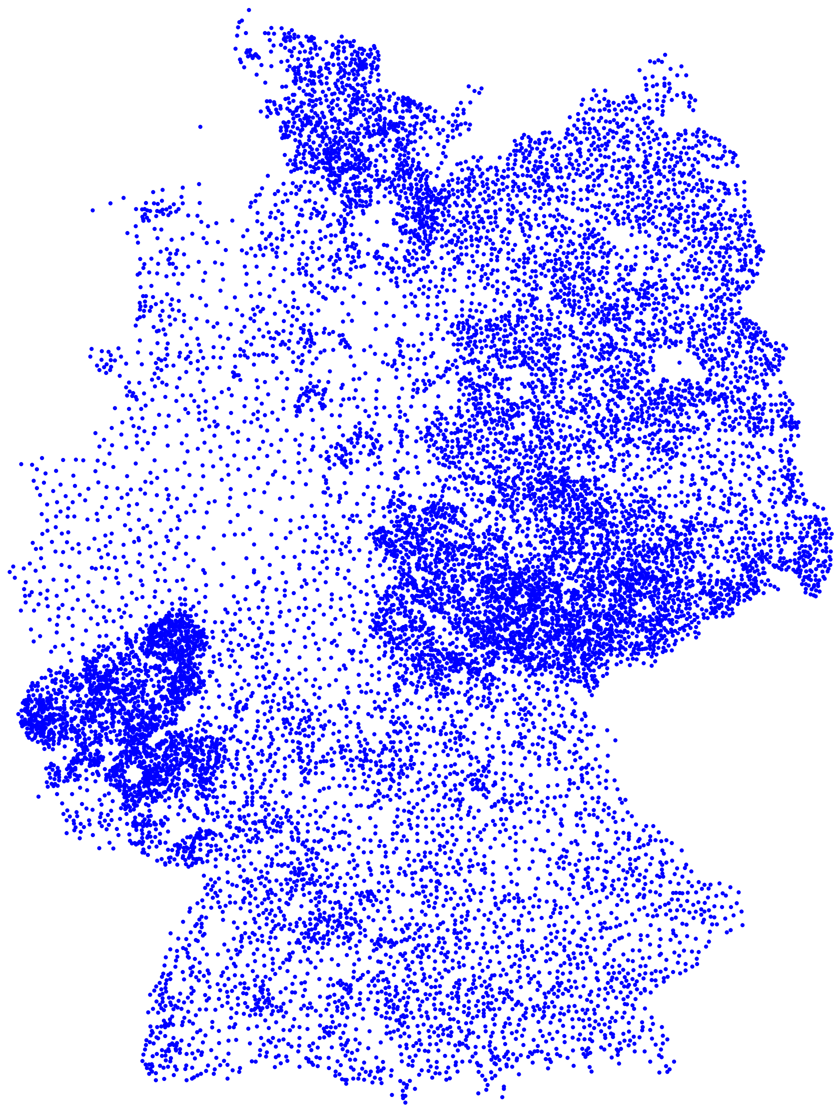
カオスニューラルネットワークの応用

- 連想記憶
  - 動的な連想記憶
  - カオス的遍歴
- 組み合わせ最適化問題
  - 巡回セールスマン問題 (TSP)
  - 2 次割り当て問題 (QAP)

巡回セールスマン問題 (TSP)

あるセールスマンが，N 都市を巡回して旅行することになった．各都市間の距離が与えられたとして，これらの N 都市を一度だけ訪れ，最後に出発点となる都市に戻るような経路 (巡回路) の中で最も短いものを求めよ．

TSP (d15112)



URLs

- TSPLIB

  http://www.iwr.euni-heidelberg.de/groups/comopt/software/TSPLIB95/

- TSPBIB

  http://www.densis.fee.unicamp.br/˜moscato/TSPBIB_home.html

- Solving Travelling Salesman Problem

  http://www.math.princeton.edu/tsp/

巡回セールスマン問題 (TSP)

あるセールスマンが，N 都市を巡回して旅行することになった．各都市間の距離が与えられたとして，これらの N 都市を一度だけ訪れ，最後に出発点となる都市に戻るような経路 (巡回路) の中で最も短いものを求めよ．

巡回セールスマン問題 (TSP)

あるセールスマンが，N 都市を巡回して旅行することになった．各都市間の距離が与えられたとして，これらの N 都市を一度だけ訪れ，最後に出発点となる都市に戻るような経路 (巡回路) の中で最も短いものを求めよ．

↓

◀ 最初に思いつきそうな解法は?

- ❏ 全ての巡回路の長さを出す.
- ❏ 最も短い巡回路長を与える訪問順を解とする.

巡回セールスマン問題 (TSP)

あるセールスマンが，N 都市を巡回して旅行することになった．各都市間の距離が与えられたとして，これらの N 都市を一度だけ訪れ，最後に出発点となる都市に戻るような経路 (巡回路) の中で最も短いものを求めよ．

↓

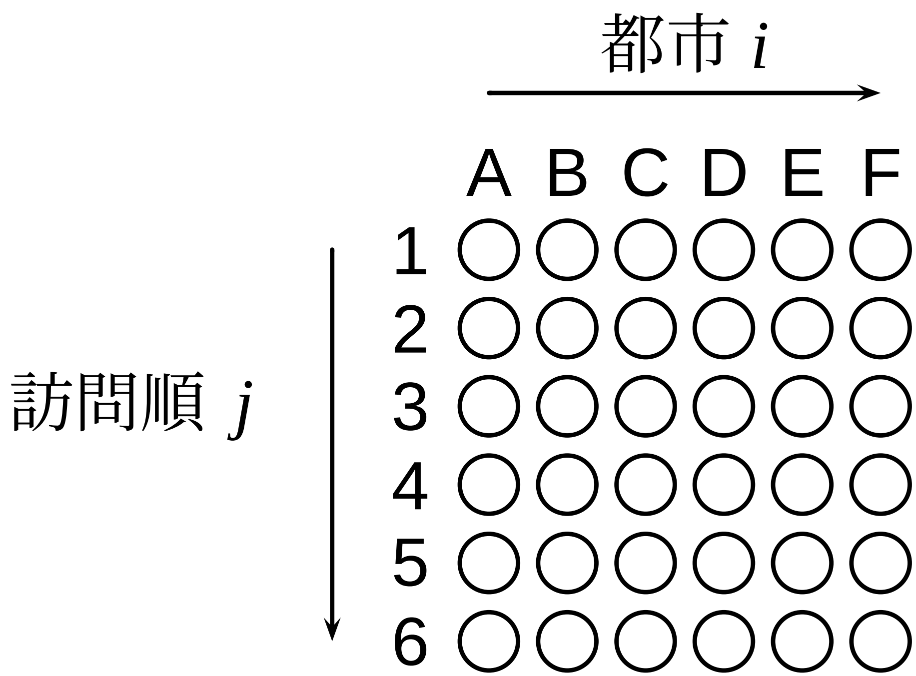
- 最初に思いつきそうな解法は?
  - 全ての巡回路の長さを出す.
  - 最も短い巡回路長を与える訪問順を解とする.
- 全く実用的でない.
  $\because$ 巡回路の総数は $(N-1)!/2$
  $\Longrightarrow$ N の増加とともに指数関数的に増大

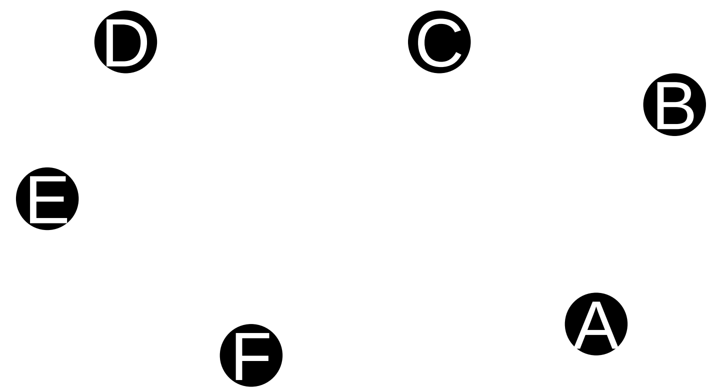
TSP の解の総数

N	$(N-1)!/2$	
4	3	
5	12	
6	60	
7	360	
8	2,520	
9	20,160	
10	181,440	18 万
11	1,814,400	180 万
12	19,958,400	1995 万
13	239,500,800	2 億
14	3,113,510,400	31 億
15	43,589,145,600	435 億
16	653,837,184,000	6538 億
17	10,461,394,944,000	10 兆
18	177,834,714,048,000	177 兆
19	3,201,185,852,864,000	3201 兆
20	60,822,550,204,416,000	6 京
⋮	⋮	
30	4,420,880,996,869,850,977,271,808,000,000	
⋮	⋮	
50	304,140,932,017,133,780,436,126,081,660,647, 688,443,776,415,689,605,120,000,000,000	
100	4666310772197207634084961942813335024535798413219081073429648194760879999614957804470731988078259143126848960413611879125592605458432000000000000000000000000	
⋮	⋮	
1000	$2.011936300385468\times10^{2564}$	
10000	$1.423129840458527\times10^{35655}$	

相互結合型ニューラルネットによる**TSP**の解法

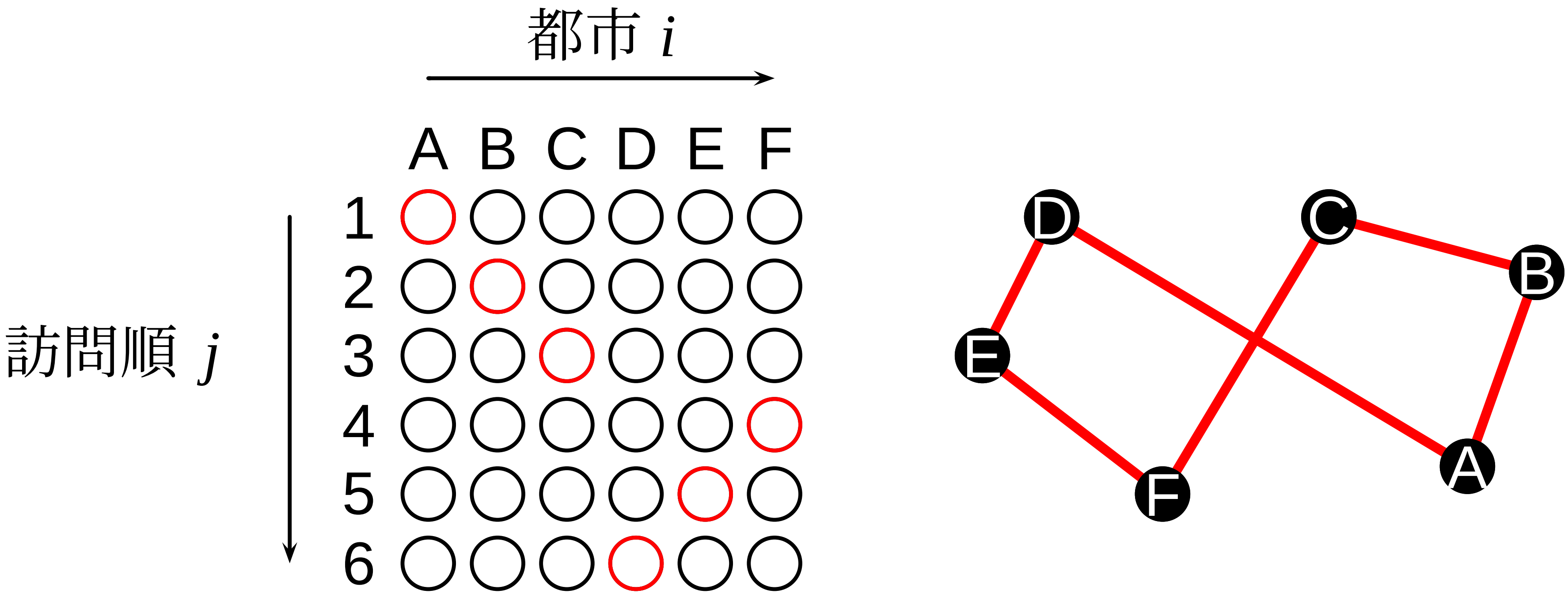
- N-都市 TSP $\Rightarrow N \times N$ のニューロンを用意
- (i, j) ニューロンの発火 $\Leftrightarrow$ 都市 i を j 番目に訪問する経路





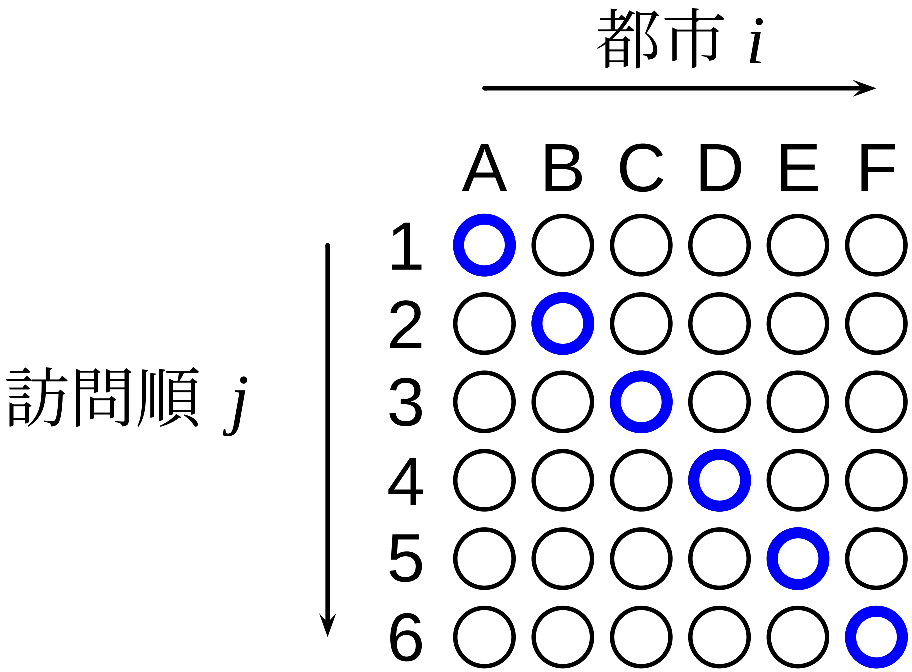
相互結合型ニューラルネットによる **TSP** の解法

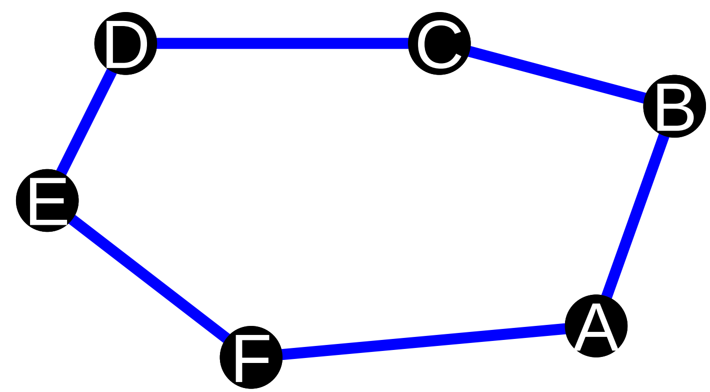
- N-都市 TSP $\Rightarrow$ $N \times N$ のニューロンを用意
- (i, j) ニューロンの発火 $\Leftrightarrow$ 都市 i を j 番目に訪問する経路



相互結合型ニューラルネットによる **TSP** の解法

- N-都市 TSP $\Rightarrow$ $N \times N$ のニューロンを用意
- (i, j) ニューロンの発火 $\Leftrightarrow$ 都市 i を j 番目に訪問する経路





TSP と制約条件

- N 都市問題に対して $N \times N$ 個のニューロンを用意する.
  - ❑ 各行，各列において，発火しているニューロン数は 1 となるような発火パターンが必要.
  - ❑ もちろん，巡回路長 (距離) は短くする必要がある.
- ある行 i に着目すると

$$E_1 = \sum_i \left(\sum_j x_{ij} - 1 \right)^2$$

- ある列 j に着目すると

$$E_2 = \sum_j \left(\sum_i x_{ij} - 1 \right)^2$$

TSP と制約条件

$$
\begin{aligned}
E_1 &= \sum_i \left(\sum_j x_{ij} - 1 \right)^2 \\
E_2 &= \sum_j \left(\sum_i x_{ij} - 1 \right)^2 \\
E_3 &= \sum_i \sum_j \sum_m d_{im} x_{ij} (x_{mj+1} x_{mj-1}) \\
E &= A(E_1 + E_2) + BE_3
\end{aligned}
$$

展開

$$
\begin{aligned}
E_1 &= \sum_i \left(\sum_j x_{ij} - 1 \right)^2 = \sum_i \left\{ \left(\sum_j x_{ij} \right)^2 - 2 \sum_j x_{ij} + 1 \right\} \\
&= \sum_i \left\{ \sum_j x_{ij} \sum_n x_{in} - 2 \sum_j x_{ij} + 1 \right\} \\
&= \sum_i \left\{ \sum_j \sum_n x_{ij} x_{in} - 2 \sum_j x_{ij} + 1 \right\} \\
1 &= (1 - \delta_{jn}) + \delta_{jn} \text{ を用いると,} \\
&= \sum_i \left\{ \sum_j \sum_n (1 - \delta_{jn}) x_{ij} x_{in} + \sum_j \sum_n \delta_{jn} x_{ij} x_{in} - 2 \sum_j x_{ij} + 1 \right\}
\end{aligned}
$$

また

$$\sum_j \sum_n \delta_{jn} x_{ij} x_{in} = \sum_j \delta_{jj} x_{ij}^2 = \sum_j \delta_{jj} x_{ij} = \sum_j x_{ij}$$

であるので,

$$\begin{aligned} E_1 &= \sum_i \left\{ \sum_j \sum_n (1-\delta_{jn}) x_{ij} x_{in} + \sum_j \sum_n \delta_{jn} x_{ij} x_{in} - 2 \sum_j x_{ij} + 1 \right\} \\ &= \sum_i \left\{ \sum_j \sum_n (1-\delta_{jn}) x_{ij} x_{in} - \sum_j x_{ij} + 1 \right\} \\ &= \sum_i \sum_j \sum_n (1-\delta_{jn}) x_{ij} x_{in} - \sum_i \sum_j x_{ij} + \sum_i 1 \end{aligned}$$

さて，以下の式において，$m = i$ のときのみ

$$\sum_m \delta_{im} = \delta_{ii} = 1$$

となるので,

$$\begin{aligned}
E_1 &= \sum_i \sum_j \sum_n (1 - \delta_{jn}) x_{ij} x_{in} - \sum_i \sum_j x_{ij} + \sum_i 1 \\
&= \sum_i \left(\sum_m \delta_{im} \right) \sum_j \sum_n (1 - \delta_{jn}) x_{ij} x_{in} - \sum_i \sum_j x_{ij} + \sum_i 1 \\
&= \sum_i \sum_m \sum_j \sum_n \delta_{im} (1 - \delta_{jn}) x_{ij} x_{in} - \sum_i \sum_j x_{ij} + \sum_i 1
\end{aligned}$$

同様にして

$$E_2 = \sum_j \sum_n \sum_i \sum_m \delta_{jn}(1 - \delta_{im}) x_{ij} x_{in} - \sum_i \sum_j x_{ij} + \sum_i 1$$

従って,「各行各列の発火ニューロン数が１個である」という制約条件は,

$$E_1 + E_2 = \sum_i \sum_m \sum_j \sum_n \left[\delta_{im}(1 - \delta_{jn}) + \delta_{jn}(1 - \delta_{im}) \right] x_{ij} x_{mn}$$

また，距離を最小とする制約条件により,

$$E_3 = \sum_i \sum_j \sum_m \sum_n d_{im}(\delta_{j+1n} + \delta_{j-1n}) x_{ij} x_{mn}$$

結合係数の決定

- まとめると，

$$W_{ijmn} = -2A\left\{\delta_{im}(1-\delta_{jn}) + \delta_{jn}(1-\delta_{im}) - Bd_{im}(\delta_{j+1n} + \delta_{j-1n})\right\}$$

$$\theta_{ij} = A$$

とすれば良い．

- エネルギー最小化原理により，上のように結合係数を決めてやれば，与えられた初期値からスタートして，エネルギー

$$A(E_1 + E_2) + BE_3$$

を小さくするように，ネットワークは動作する．

- Hopfield & Tank (1985) がエネルギー最小化するニューラルネットのダイナミクスを用いて，TSP 等へ応用