カオスと時系列解析

神戸大学 大学院 自然科学研究科 集中講義

池口 徹

埼玉大学 大学院 理工学研究科 情報数理科学専攻

338–8570 さいたま市下大久保 255

Tel : 048–858–3577

Fax : 048–858–3716

Email : tohru@ics.saitama-u.ac.jp

URL : http://www.nls.ics.saitama-u.ac.jp/˜tohru

カオスと時系列解析 – 内容 –

1. 時系列解析の動機
2. カオスとは何か，カオス現象についての簡単な復習
3. 時系列信号の観測とアトラクタの再構成
   (a) 力学系と観測関数，ノイズ
   (b) 埋め込み定理とアトラクタの再構成
   (c) 時間遅れ座標の設定
4. カオス時系列解析の基礎
   (a) フラクタル次元解析
   (b) リアプノフスペクトラム解析
   (c) リカレンスプロット
5. カオスと非線形予測
6. カオスと統計的仮説検定法

参考書

合原一幸編
池口徹，山田泰司，小室元政著：
「カオス時系列解析の基礎と応用」
産業図書, 2000

参考書

合原一幸編
池口徹，山田泰司，小室元政著：
「カオス時系列解析の基礎と応用」
産業図書, 2000

ごめんなさい．少し(?)
誤植があります.

参考書

合原一幸編
池口徹，山田泰司，小室元政著：
「カオス時系列解析の基礎と応用」
産業図書, 2000

ごめんなさい．少し(?)
誤植があります.

正誤表もありますが . . .

参考書

合原一幸編
池口徹，山田泰司，小室元政著：
「カオス時系列解析の基礎と応用」
産業図書, 2000

ごめんなさい．少し(?)
誤植があります.

正誤表もありますが…

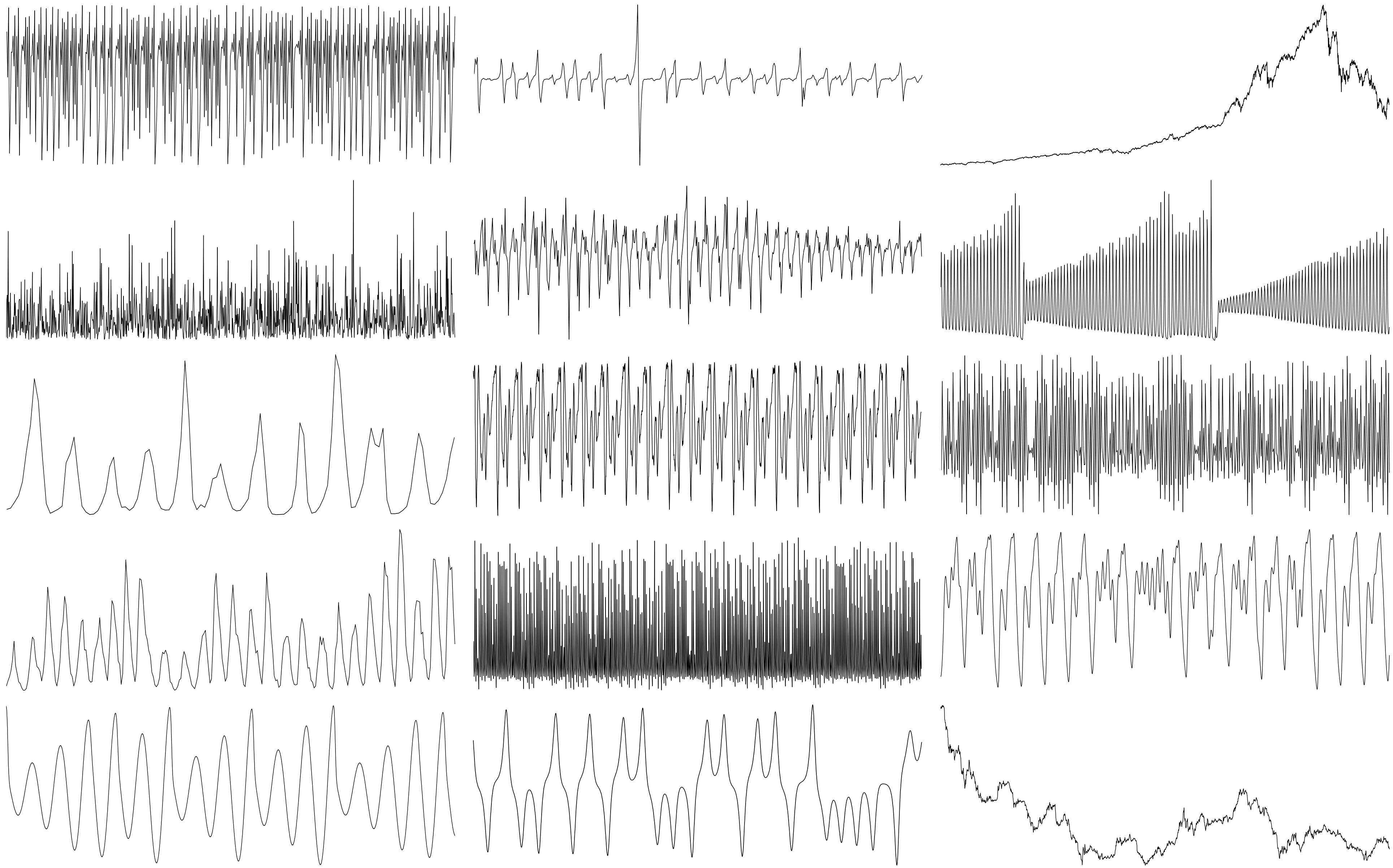
合原一幸編
池口徹，山田泰司，小室元政著：
「カオス時系列解析の基礎と応用」
産業図書, 2002，重版

複雑な振る舞いを示す時系列...

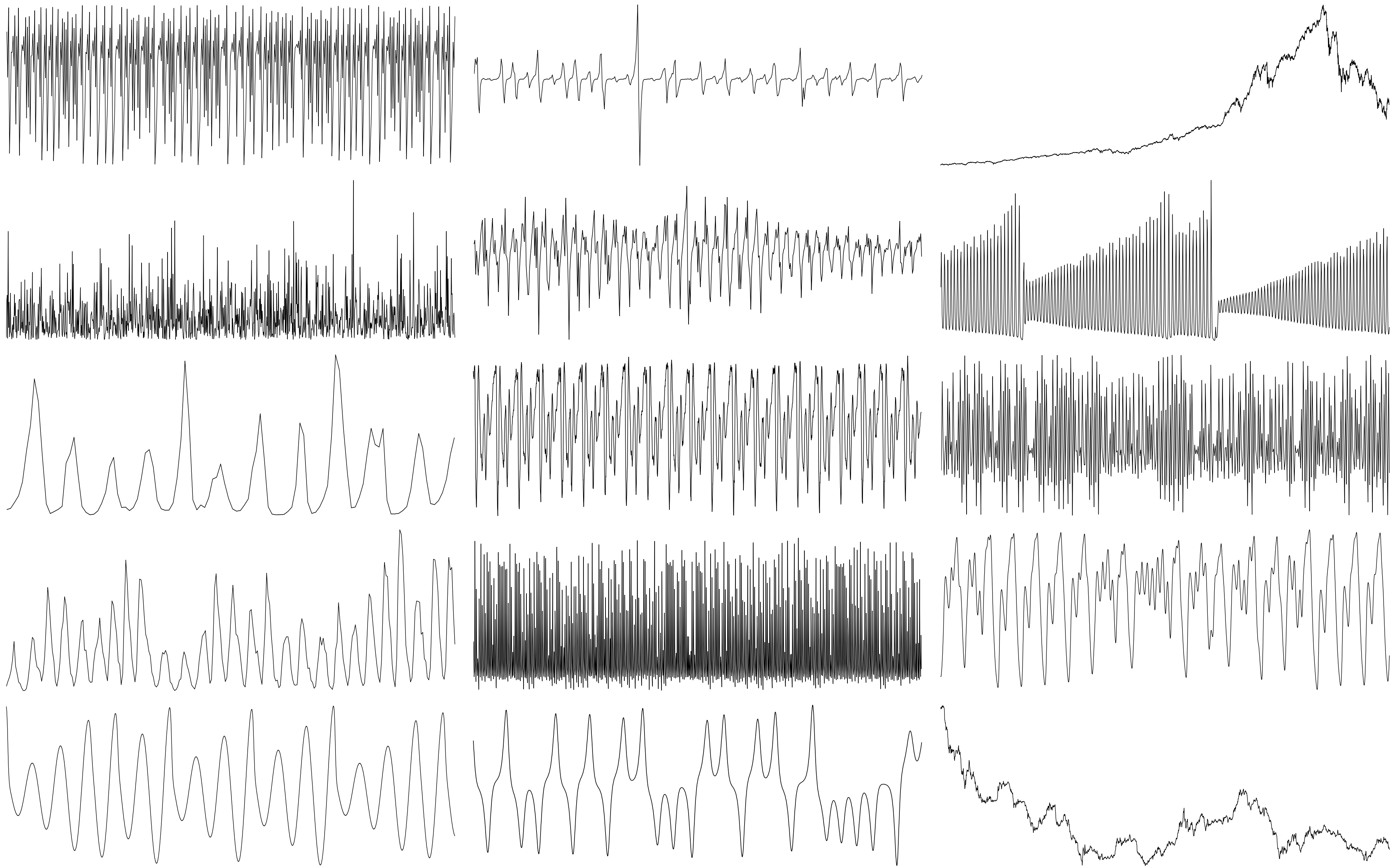
時間と共に変動する時系列信号 (time series)

- 温度，湿度，降水量
- 電気回路における電圧・電流
- 太陽黒点数，フレア数
- 経済指標 (日経 225，ダウ)
- 脳波・心電図・脈波，神経の発火パタン
- 化学反応
- 地震の発生間隔
- 感染症患者数
- 工学プラントにおける複雑な振動

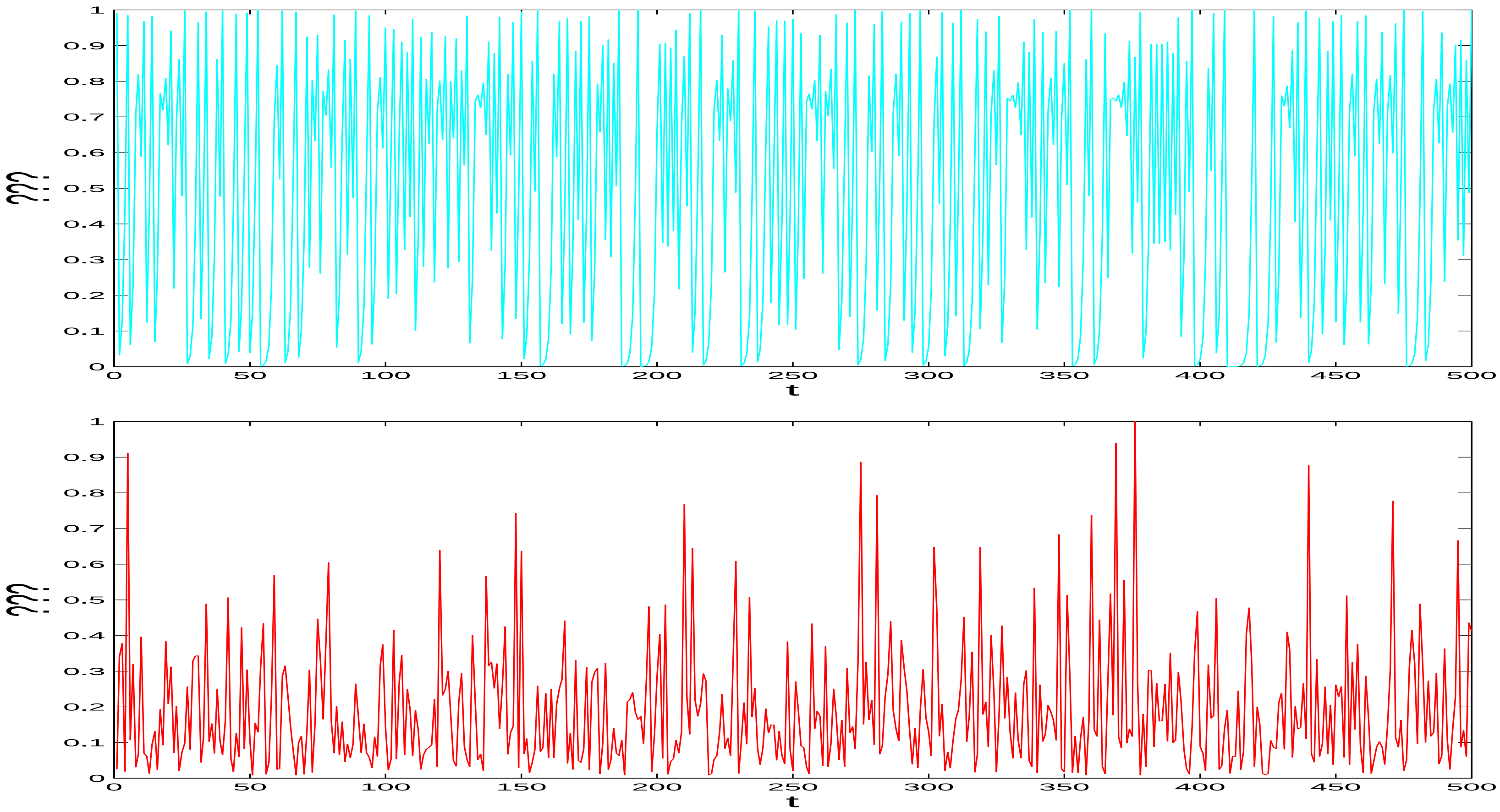
時系列信号の例



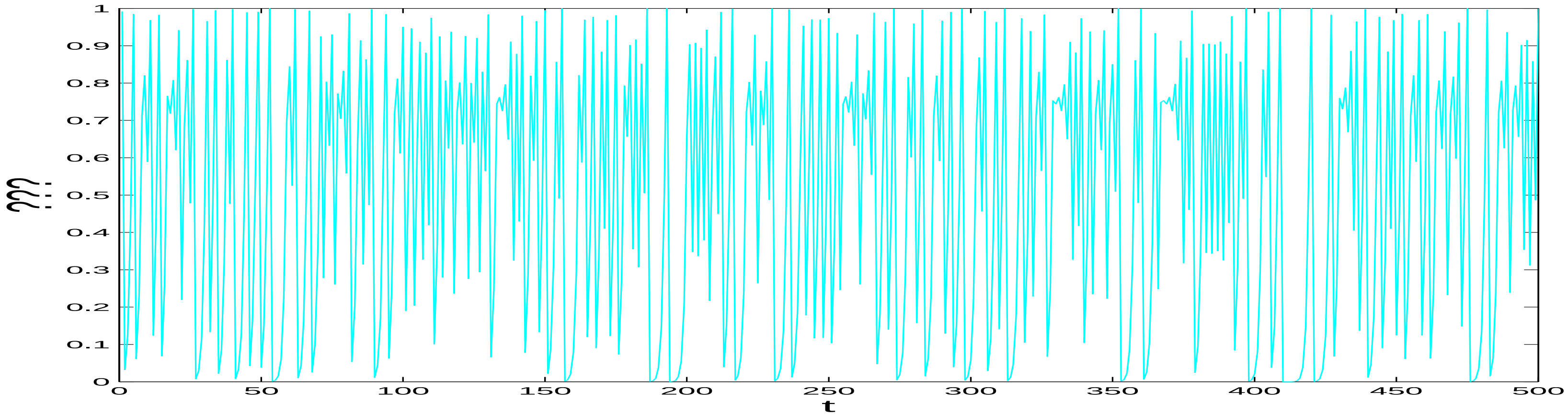
正体は?生み出した源は?

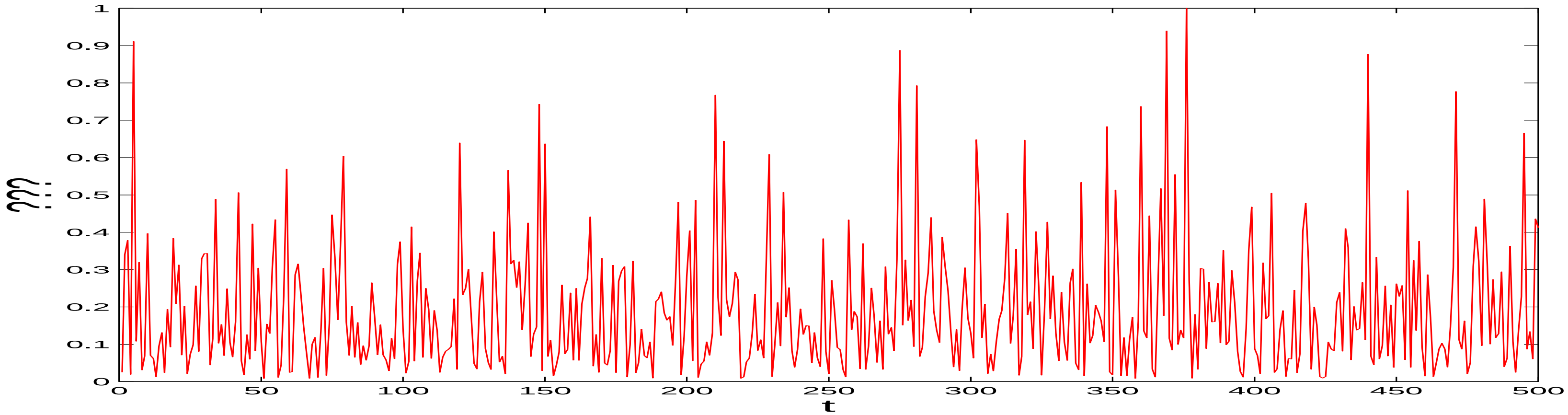


二つの複雑な時系列信号がある



二つの複雑な時系列信号がある

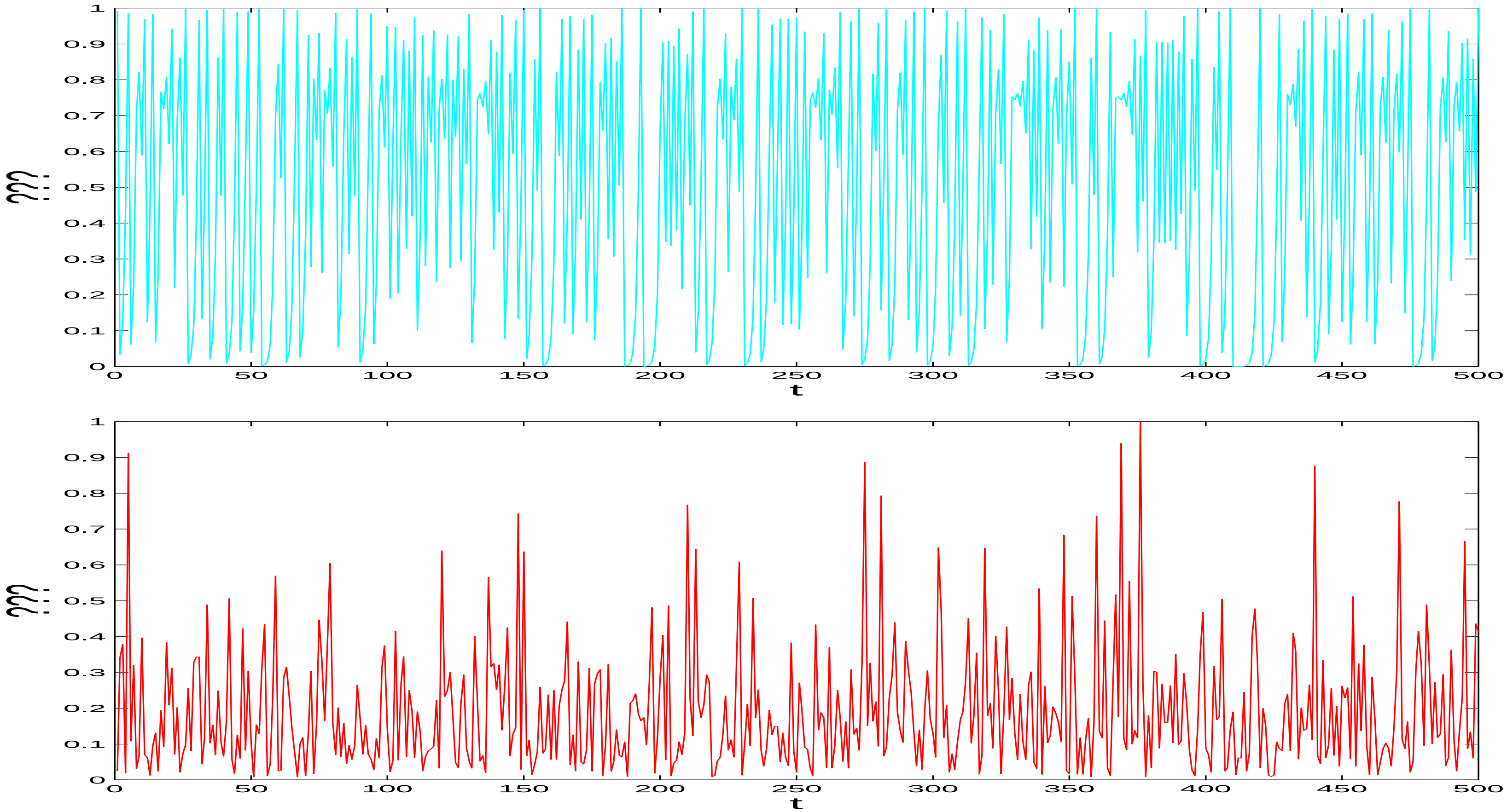




これらの時系列は,

1. 共に，複雑な振る舞いを示している

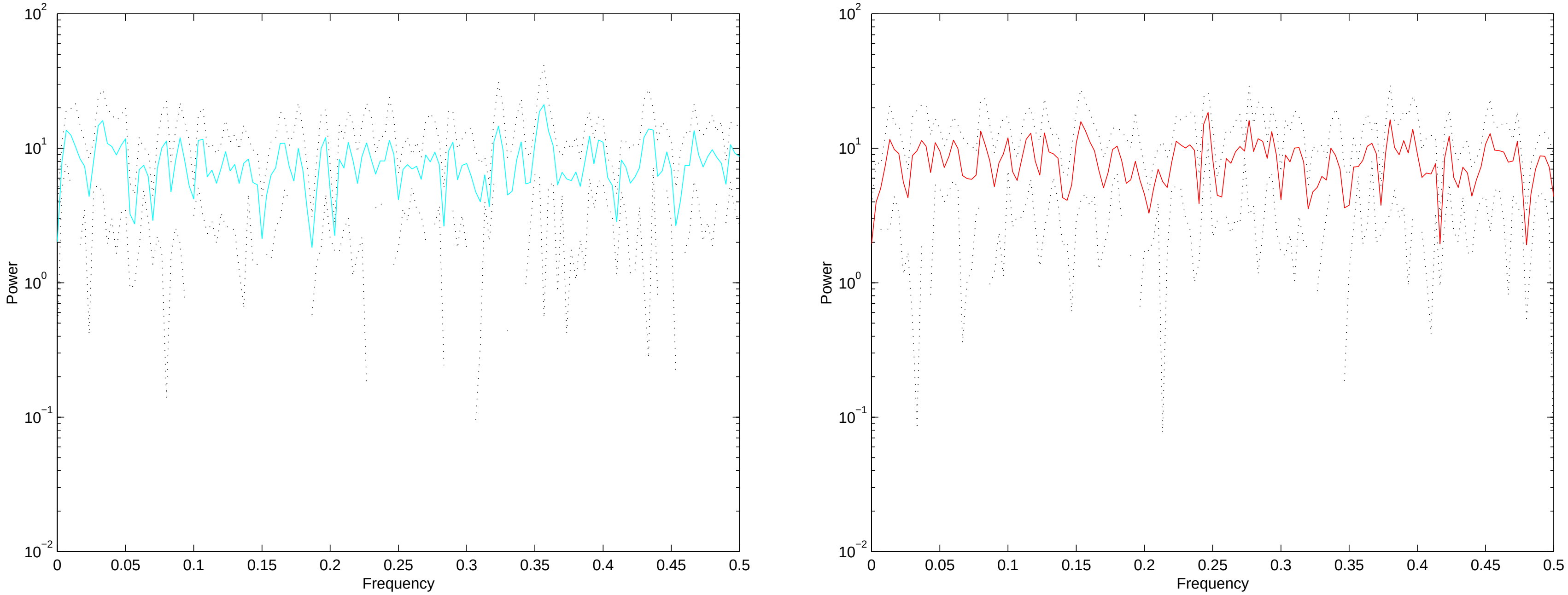
二つの複雑な時系列信号がある



これらの時系列は,

1. 共に，複雑な振る舞いを示している
2. 平均値と変動の大きさがほぼ同じ

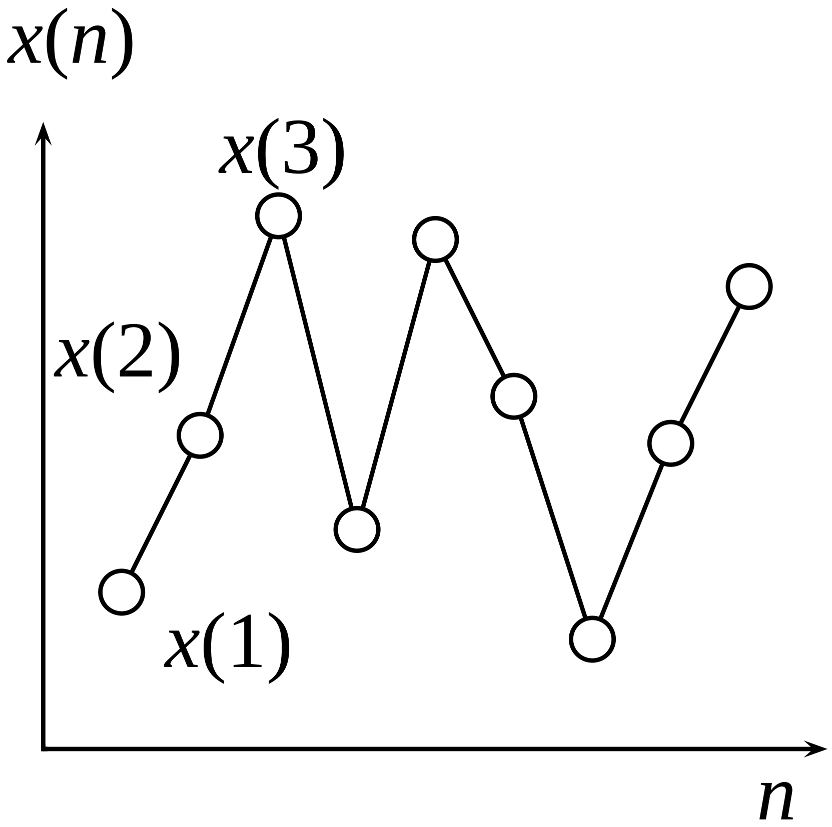
パワースペクトラムを推定すると



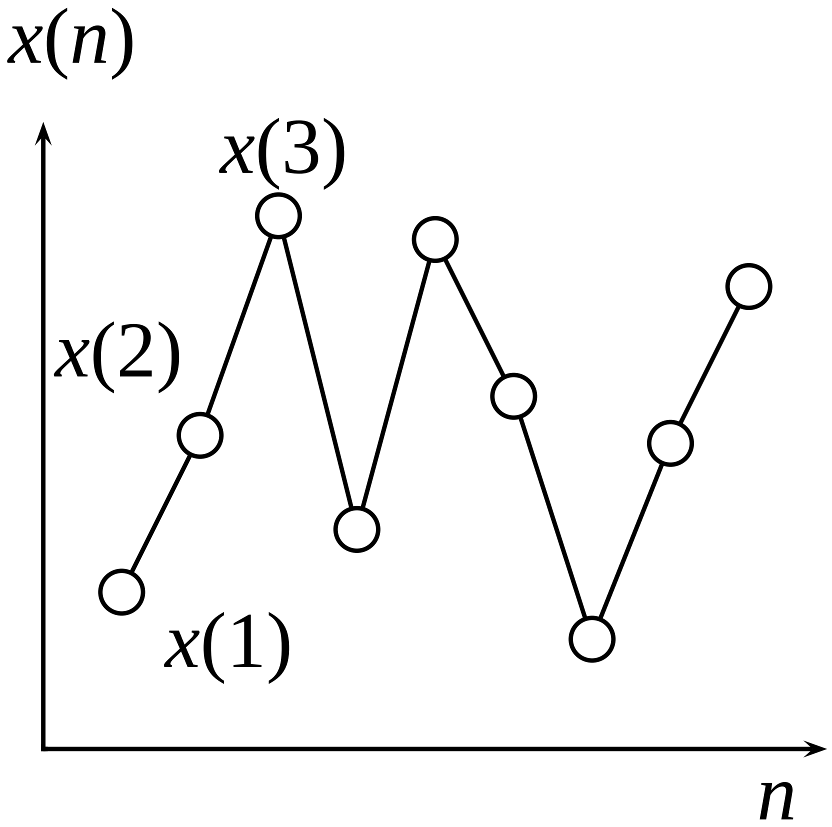
実線 · パワースペクトラム, 点線 · 信頼区間

- 低周波から高周波まで一様にパワーがある
- 典型的なノイズが示す結果

少し違った見方をすると . . .

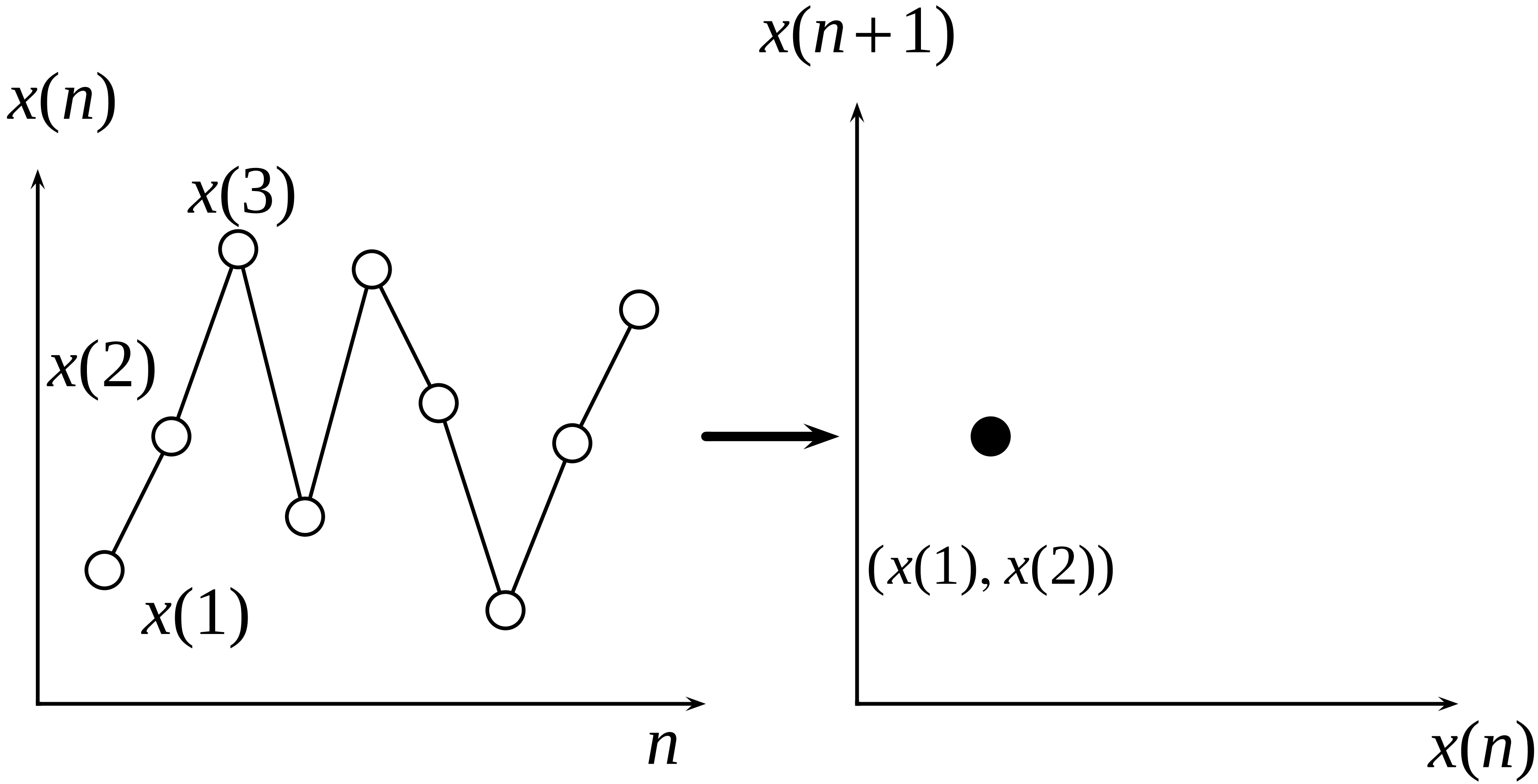


少し違った見方をすると...

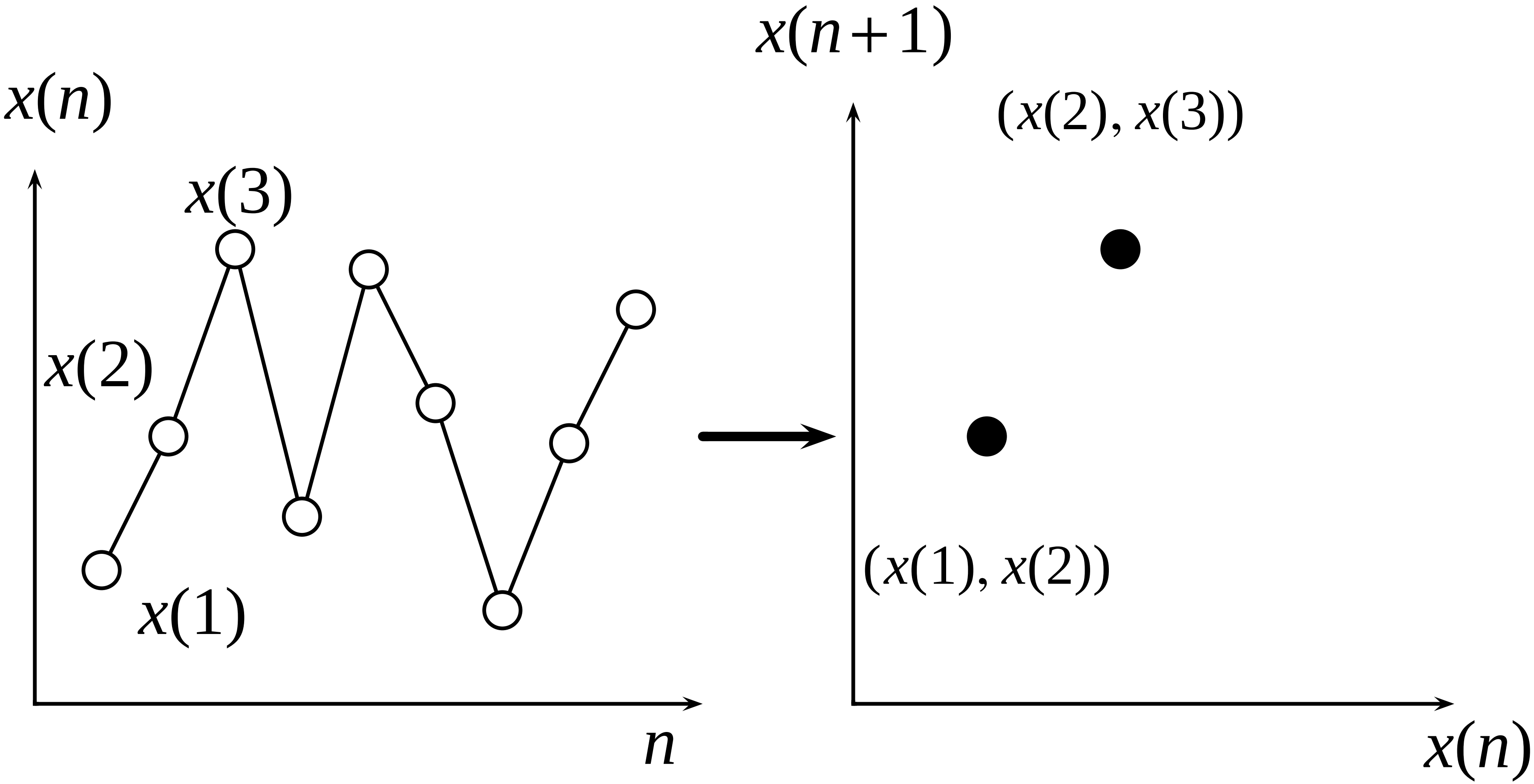


$x(n)$ と $x(n+1)$ のペアを考える.

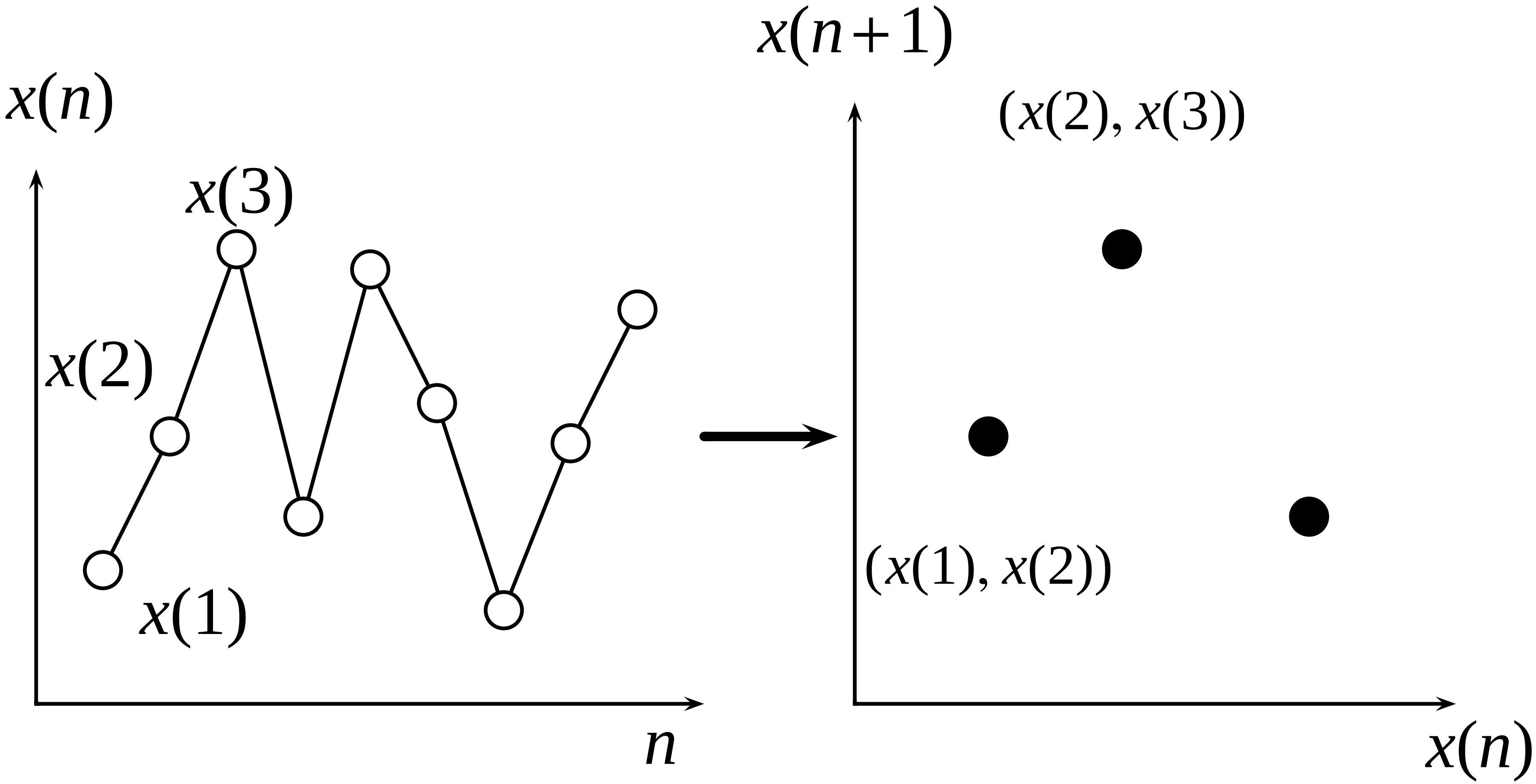
少し違った見方をすると...



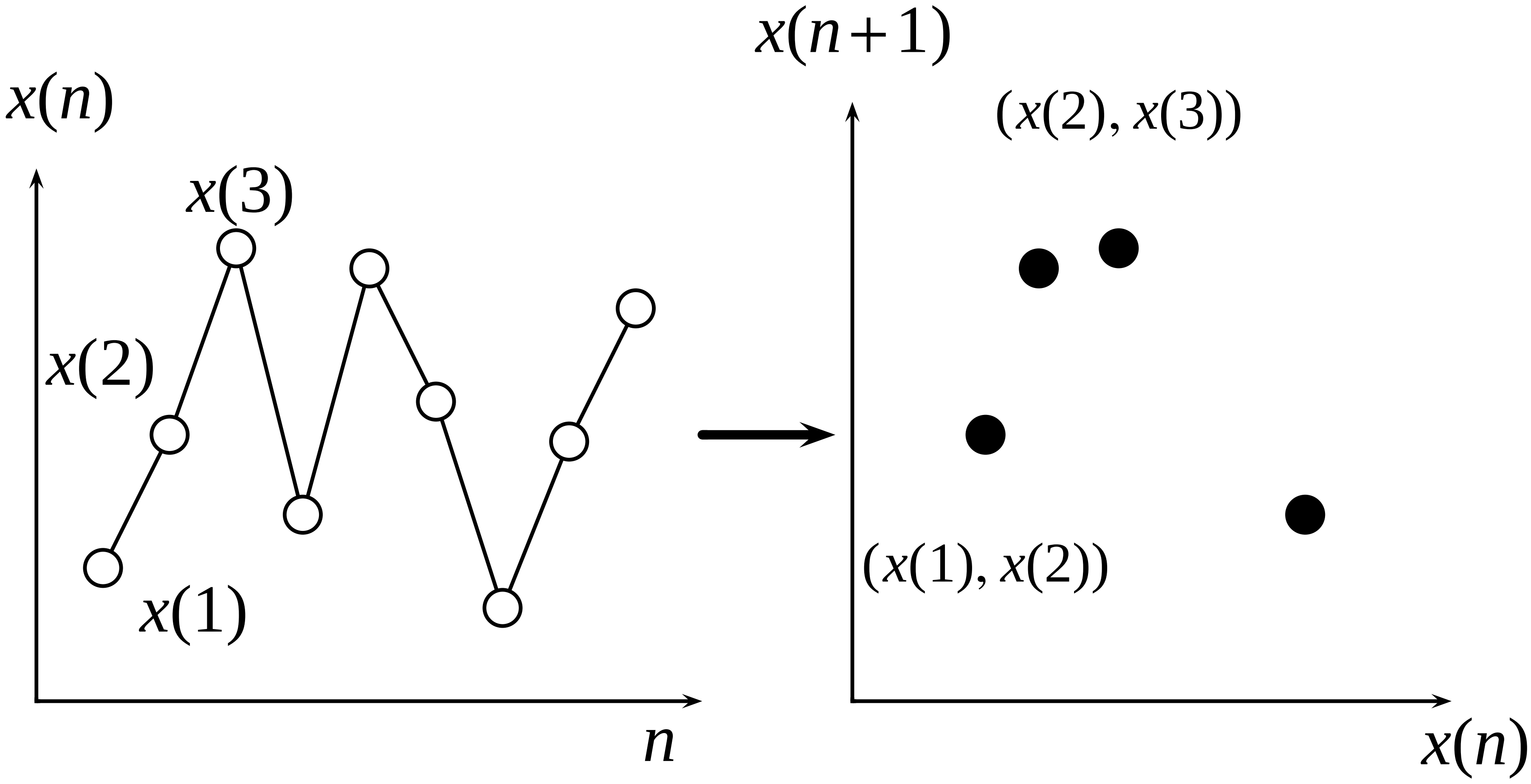
少し違った見方をすると. . .



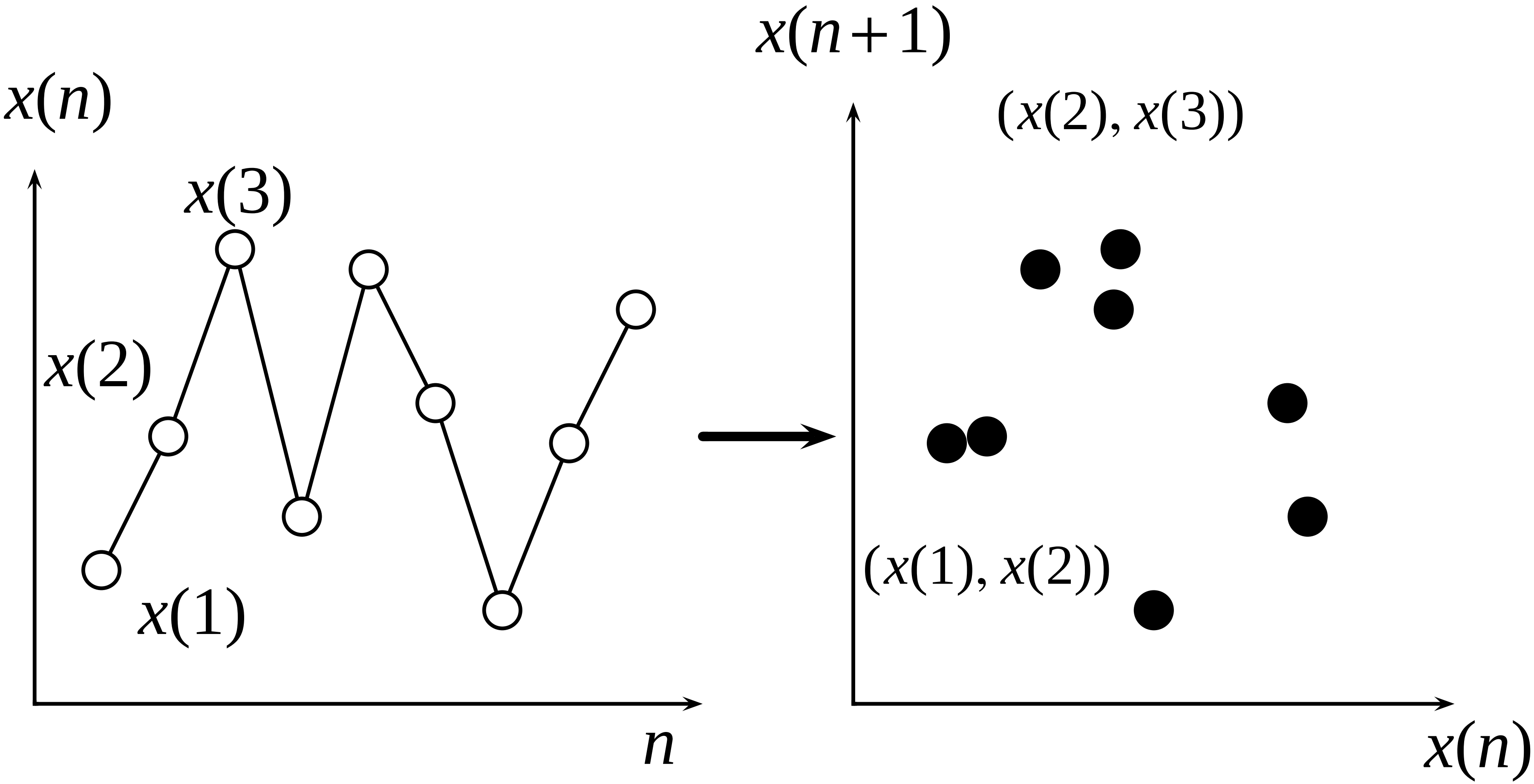
少し違った見方をすると…



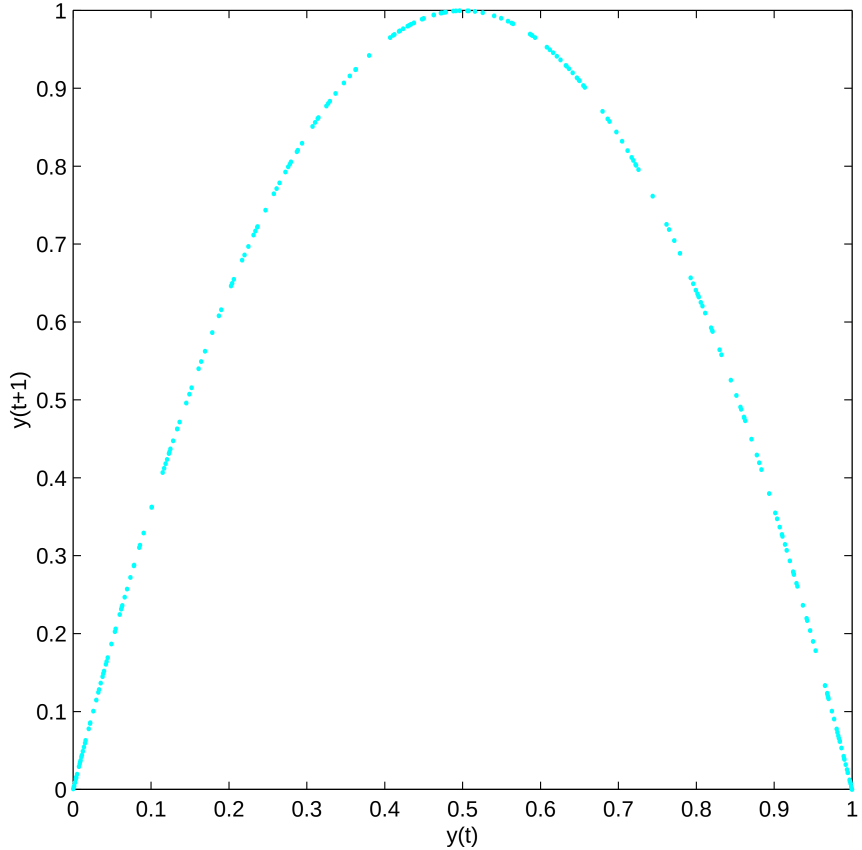
少し違った見方をすると. . .

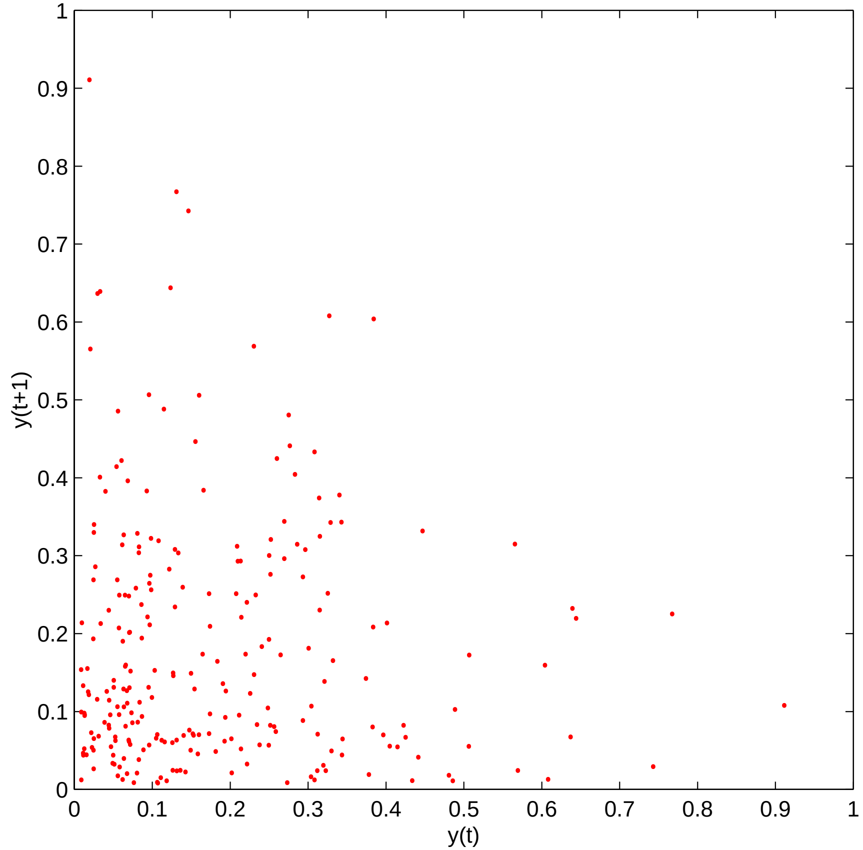


少し違った見方をすると· · ·



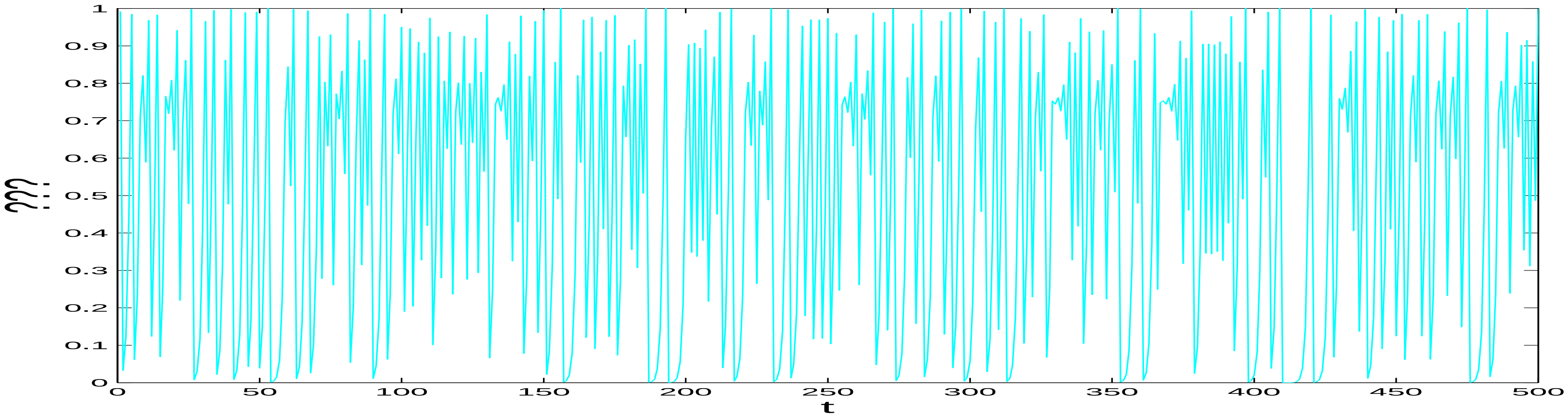
共に複雑な挙動を示していたが,,,

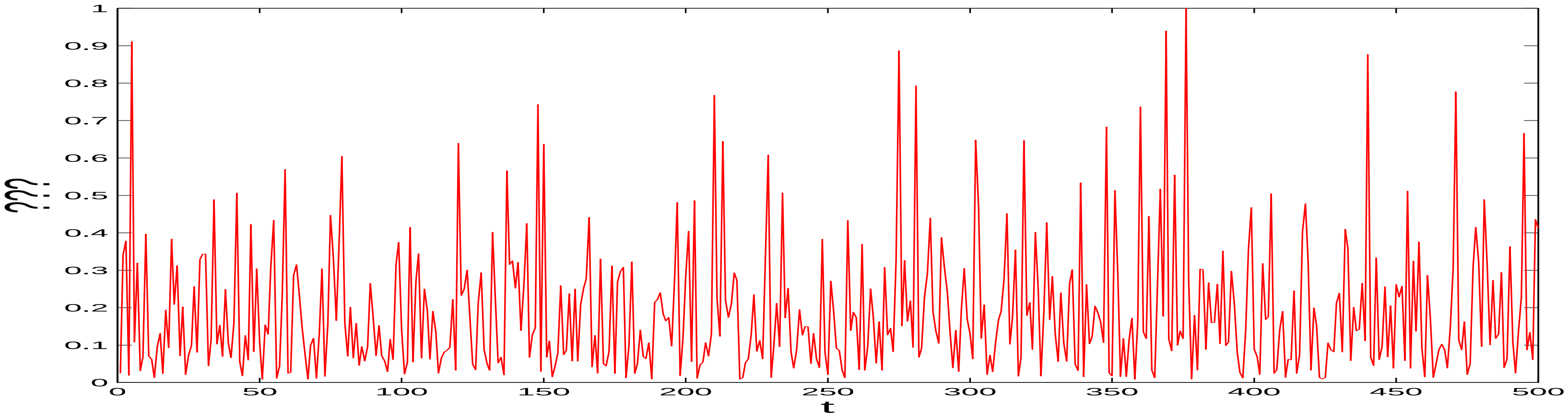




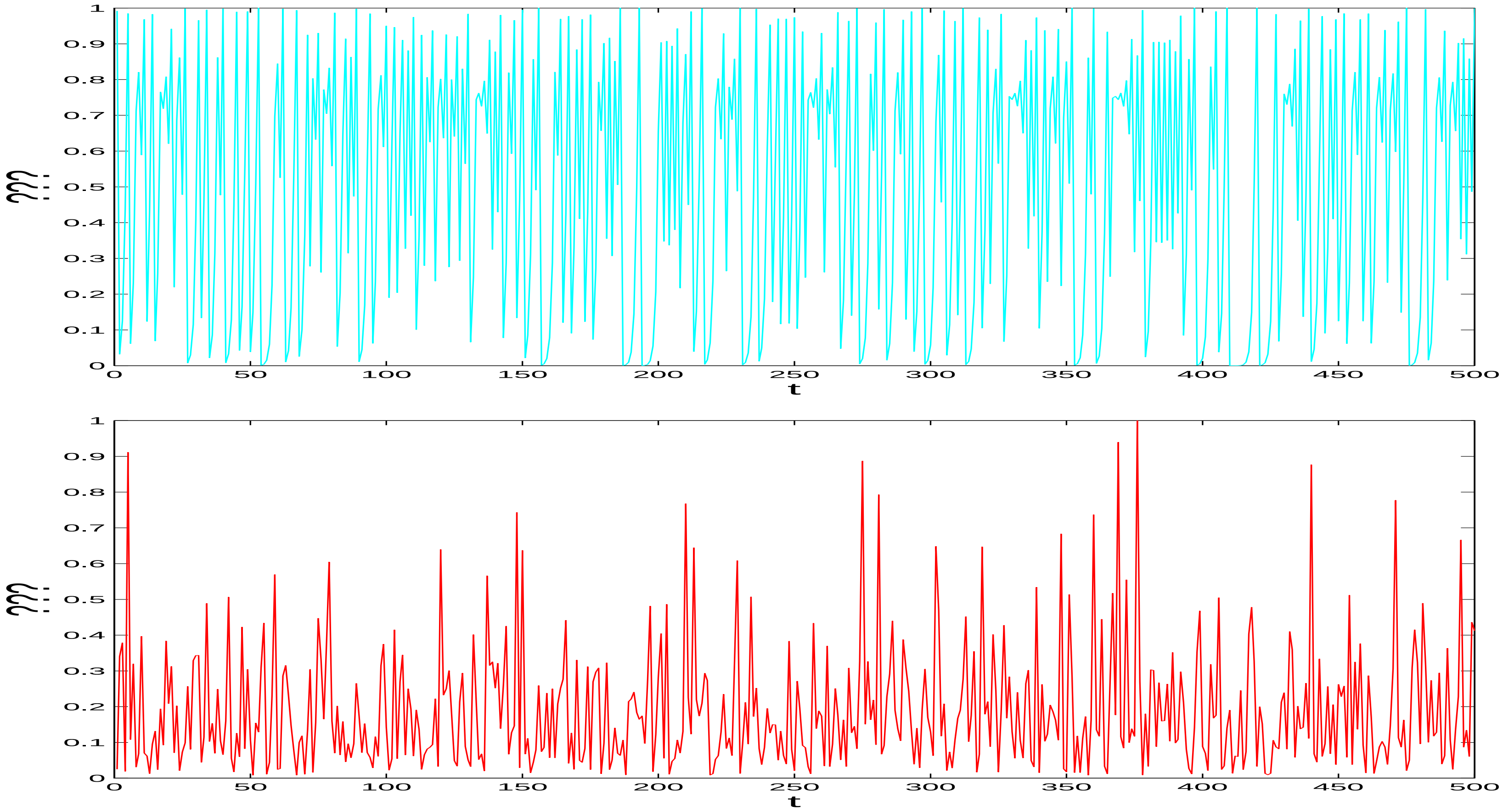
というように，差が現れる．

実は,,,





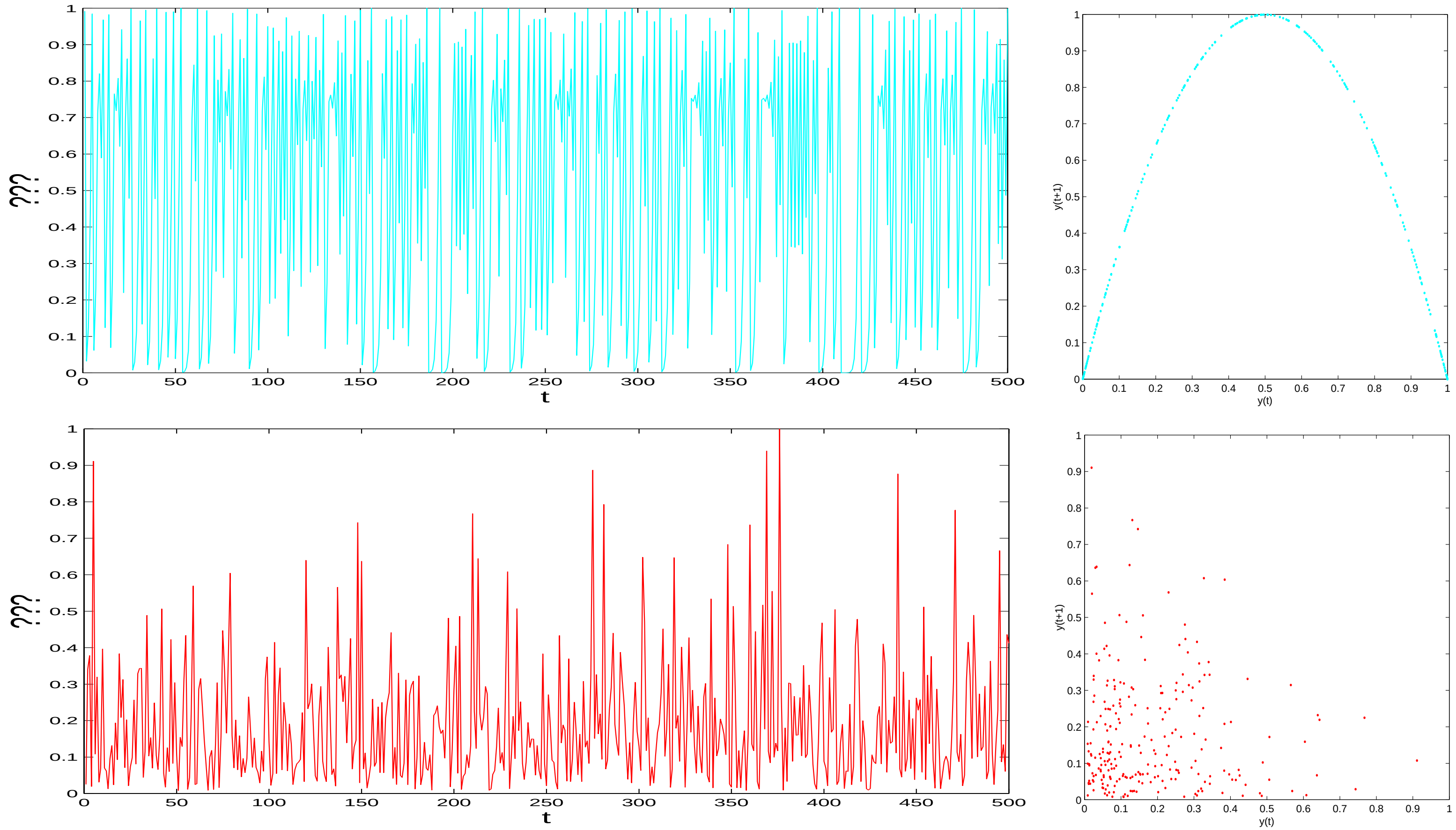
実は,,,



ロジスティック写像 $x(n+1) = 4x(n)(1 - x(n))$

コバルト γ 線放射の時間間隔

実は,,,



ロジスティック写像 $x(n+1) = 4x(n)(1 - x(n))$

コバルト γ 線放射の時間間隔

動機

少数自由度の非線形力学系

Poincaré
Hadamard
Kalman
Lorenz
Rössler
Li-Yorke
・・・

数理モデルに対する解析

動機

少数自由度の非線形力学系

Poincaré
Hadamard
Kalman
Lorenz
Rössler
Li-Yorke
· · ·

↓

数理モデルに対する解析

複雑な振る舞い

動機

少数自由度の非線形力学系

Poincaré
Hadamard
Kalman
Lorenz
Rössler
Li-Yorke
· · ·

数理モデルに対する解析

複雑な振る舞い = 決定論的カオス

動機

少数自由度の非線形力学系

Poincaré
Hadamard
Kalman
Lorenz
Rössler
Li-Yorke
· · ·

数理モデルに対する解析

?

複雑な振る舞い = 決定論的カオス

問題意識

- 観測時系列のみから元の力学系の**統計的性質**の推定が出来るか？

問題意識

- 観測時系列のみから元の力学系の**統計的性質**の推定が出来るか？

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{次元，リアプノフ指数，不変測度} \\ \text{統計量推定アルゴリズムの収束性} \\ \text{統計量の誤差，分散，精度} \end{array} \right.$$

問題意識

- 観測時系列のみから元の力学系の**統計的性質**の推定が出来るか？

$$\Longrightarrow \begin{cases} \text{次元，リアプノフ指数，不変測度} \\ \text{統計量推定アルゴリズムの収束性} \\ \text{統計量の誤差，分散，精度} \end{cases}$$

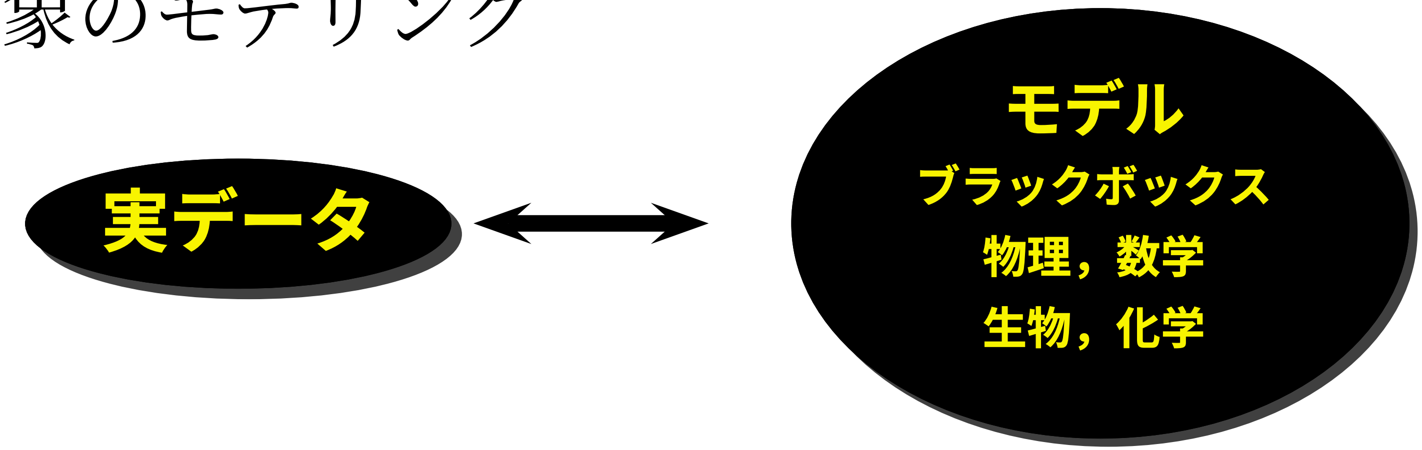
- 現象のモデリング

問題意識

- 観測時系列のみから元の力学系の**統計的性質**の推定が出来るか？

$$\Longrightarrow \begin{cases} \text{次元，リアプノフ指数，不変測度} \\ \text{統計量推定アルゴリズムの収束性} \\ \text{統計量の誤差，分散，精度} \end{cases}$$

- 現象のモデリング

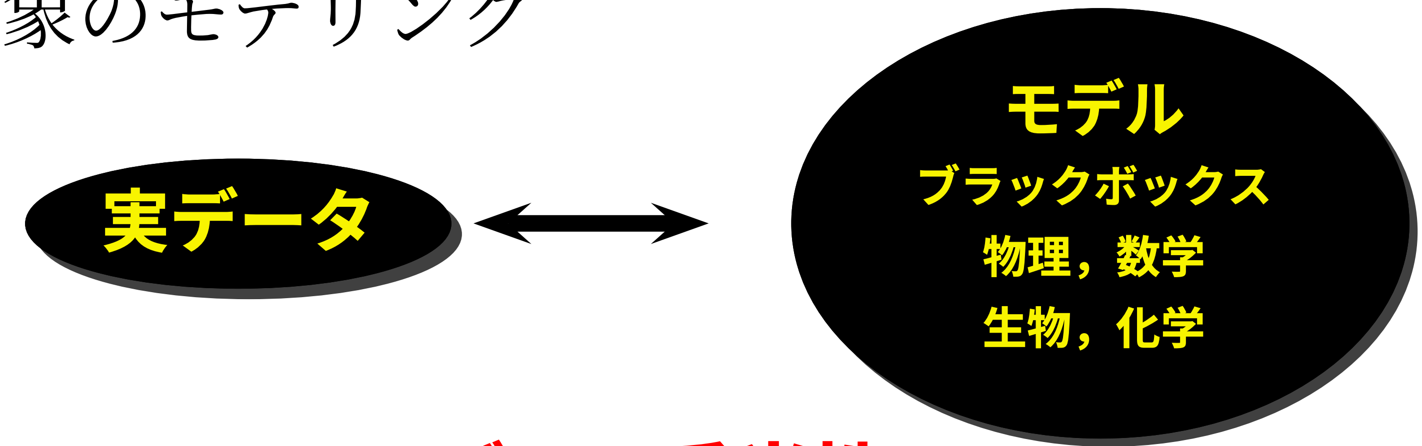


問題意識

- 観測時系列のみから元の力学系の**統計的性質**の推定が出来るか？

$$\Longrightarrow \begin{cases} \text{次元，リアプノフ指数，不変測度} \\ \text{統計量推定アルゴリズムの収束性} \\ \text{統計量の誤差，分散，精度} \end{cases}$$

- 現象のモデリング



モデルの妥当性

(実データとモデルとの比較)

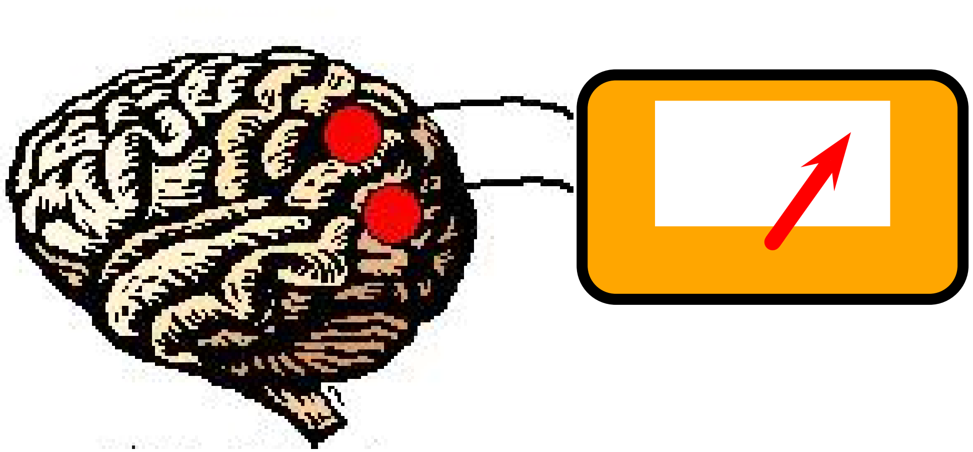
ポイント

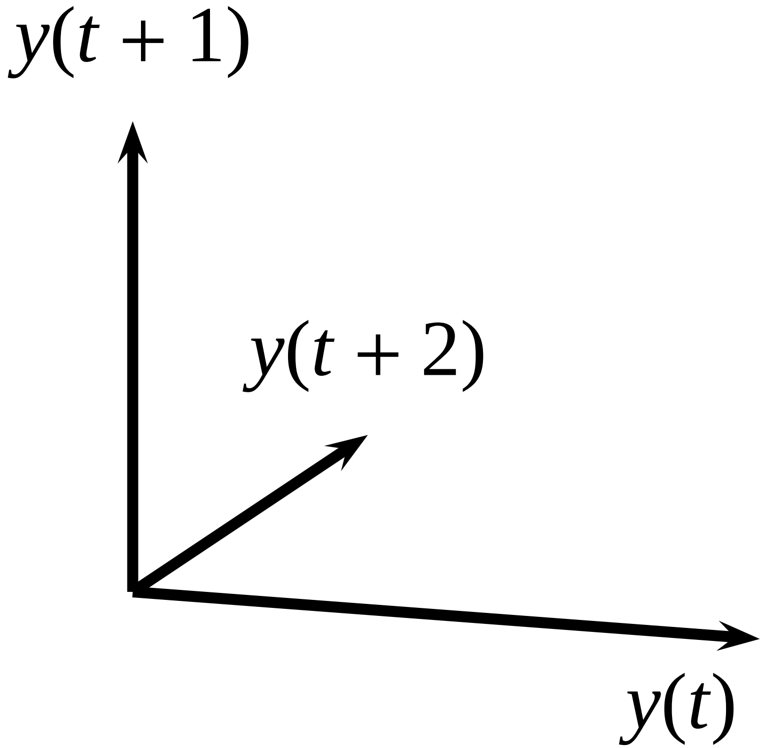
1. 複雑な挙動を生み出した源として，

   「決定論的非線形性」

   を候補として考える．
2. 決定論的非線形力学系の存在を仮定するので，状態空間を (再) 構成する必要がある．
3. カオス的挙動を示していた可能性もある．
4. カオスの特徴を表す尺度を時系列信号から推定する．
   (a) 軌道不安定性
   (b) 長期予測不能性，短期予測可能性
   (c) 自己相似性
   (d) 決定論性

解析の流れ





実システム　観測時系列信号 $y(t)$　再構成

カオスの特徴

自己相似性	フラクタル次元
軌道不安定性	リアプノフ指数
長期予測不能性	KS エントロピー
短期予測可能性	非線形予測

カオスとは

少数自由度の決定論的非線形力学系
から生じる複雑な現象

1. 少数自由度
   例えば，ロジスティック写像は1自由度
2. 決定論的力学系
   確率的要素が全く含まれない
   → 前状態が決まれば，次状態が完全に決定される
3. 非線形性
   ロジスティック写像は2次の非線形性

$$x(n+1) = ax(n)(1 - x(n))$$

力学系とは

1. 例えば,

$$\boldsymbol{x}(n+1) = \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\mu}}(x(n)), \boldsymbol{x}(n) \in \mathrm{R}^k$$

2. 分類

離散時間 対 連続時間	
差分方程式 (difference equation)	$\boldsymbol{x}(n+1) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(n))$
常微分方程式 (ordinary differential equation)	$\dot{\mathbf{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\mathbf{x}(t))$
微差分方程式 (delay differential equation)	$\dot{\mathbf{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{x}(t-\tau))$
偏微分方程式 (partial differential equation)	

自律系 対 非自律系	
自律系 (automonous system)	$\dot{\mathbf{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\mathbf{x}(t))$
非自律系 (nonautomonous system)	$\dot{\mathbf{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\mathbf{x}(t), t)$
→ 入出力システム (Input–Output System)	$\dot{\mathbf{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{u}(t))$

力学系のアトラクタ

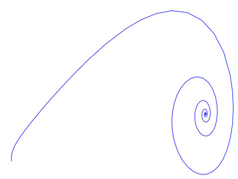
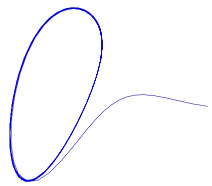
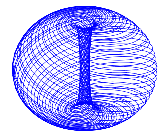
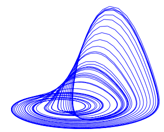
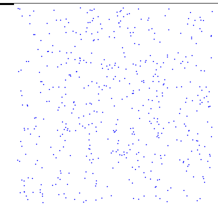
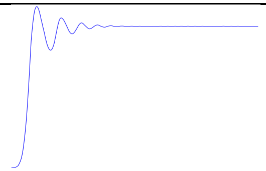
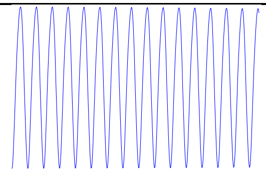
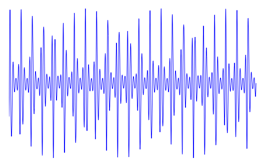
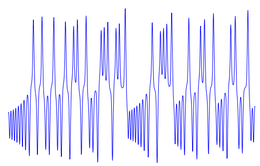
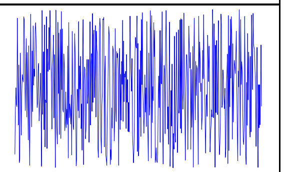
1. 力学系

$$\boldsymbol{x}(n+1) = \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\mu}}(x(n)), \boldsymbol{x}(n) \in \mathrm{R}^k$$

   に対し，初期値 $x(0)$ を与えたとき，十分時間が経過した後 $(n \to \infty)$ の，k 次元状態空間内での $\boldsymbol{x}(n)$ の漸近的振る舞い

2. 分類
   (a) 不動点，固定点 (fixed point)，平衡点
   (b) リミットサイクル (limit cycle)
   (c) トーラス (torus)
   (d) カオス (chaos)

力学系のアトラクタ

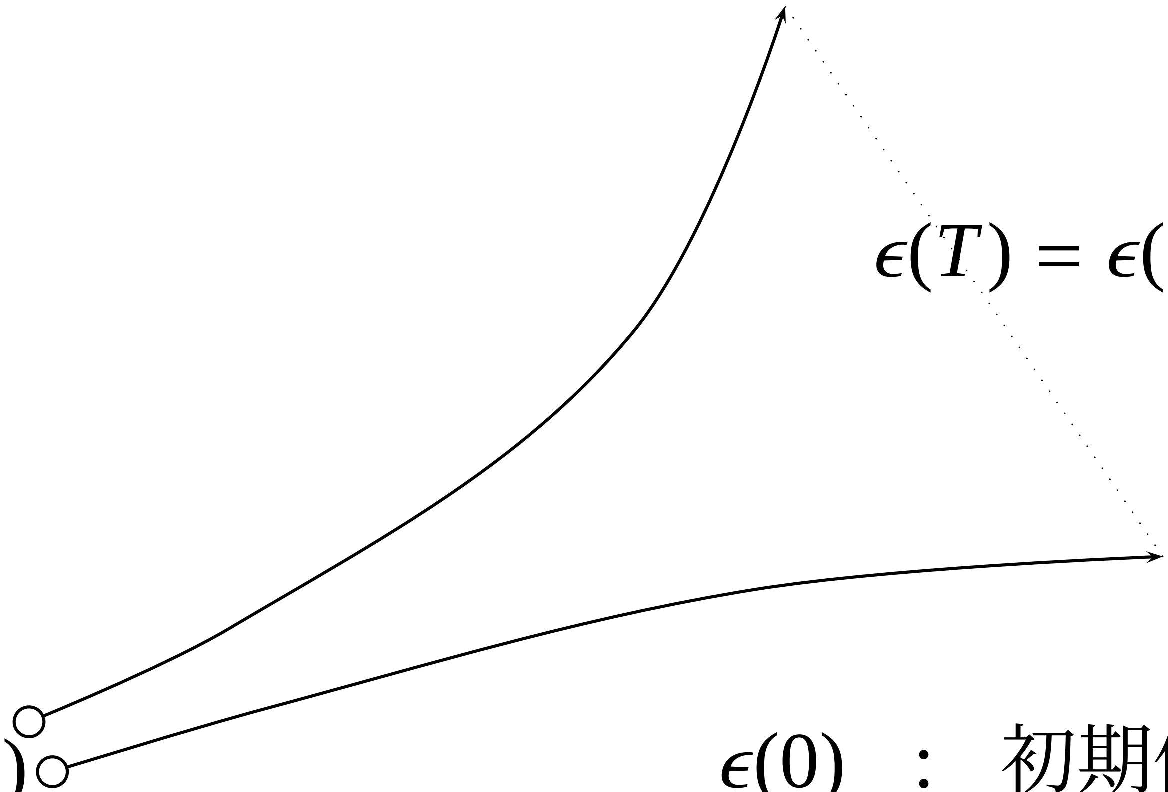
	平衡点	リミットサイクル	k トーラス	ストレンジアトラクタ	ランダム
状態空間					
振舞	平衡状態	周期	準周期	カオス	ノイジー
構造	点	閉曲線 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$	$\mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k$ $(k \geq 2)$	フラクタル	無構造
次元	0	1	k	非整数	状態空間 n
リアプノフスペクトラム	$\lambda_i < 0$ $(i{=}1, ..., n)$	$\lambda_1 = 0$ $\lambda_i < 0$ $(i{=}2, \ldots, n)$	$\lambda_i = 0$ $(i{=}1, ..., k)$ $\lambda_i < 0$ $(i{=}k{+}1, .., n)$	$\lambda_i > 0$ $(i{=}1, .., m{-}1)$ $\lambda_m = 0$ $\lambda_i < 0$ $(i{=}m{+}1, .., n)$	
波形					

カオス力学系の特徴

1. 軌道不安定性 (Orbital Instability)
2. 長期予測不能性と短期予測可能性
(Long-term unpredictability and short-term predictability)
3. アトラクタの自己相似性 (Self-similarity)
4. 非周期性 (Non-periodicity)
5. 有界性 (Boundedness)

軌道不安定性 Orbital instability

- 初期値に与えた差が，指数関数的に拡大



$$\epsilon(T) = \epsilon(0)e^{\lambda T}$$

$\epsilon(0)$

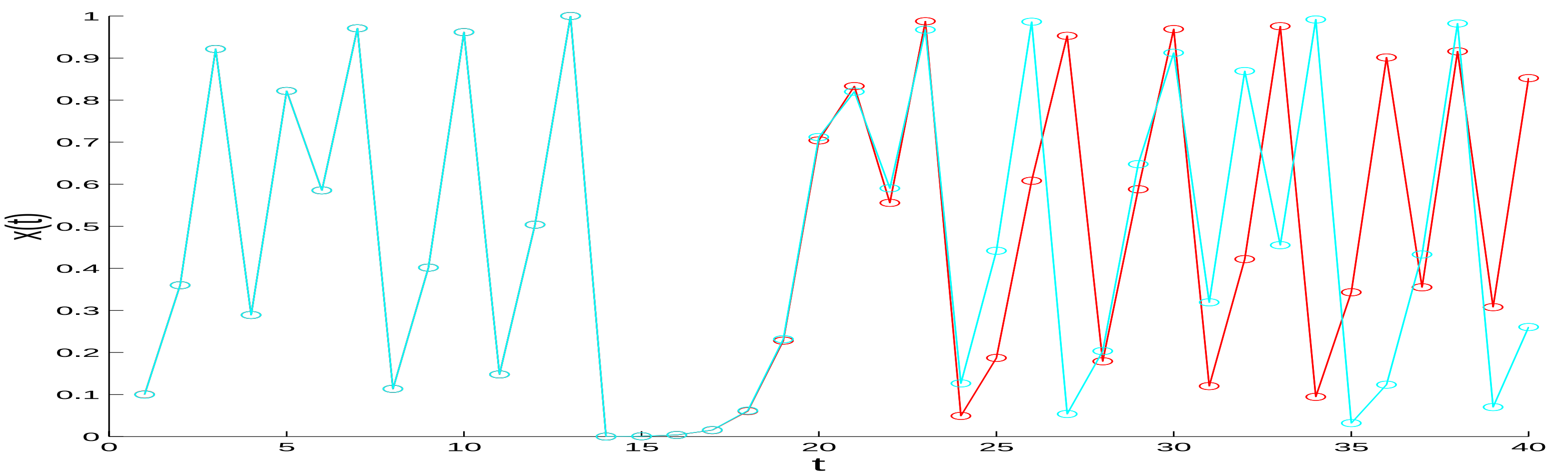
$\epsilon(0)$	:	初期値における誤差
λ	:	最大リアプノフ指数

初期値に対する鋭敏な依存性 → 軌道不安定性

カオス力学系の軌道不安定性

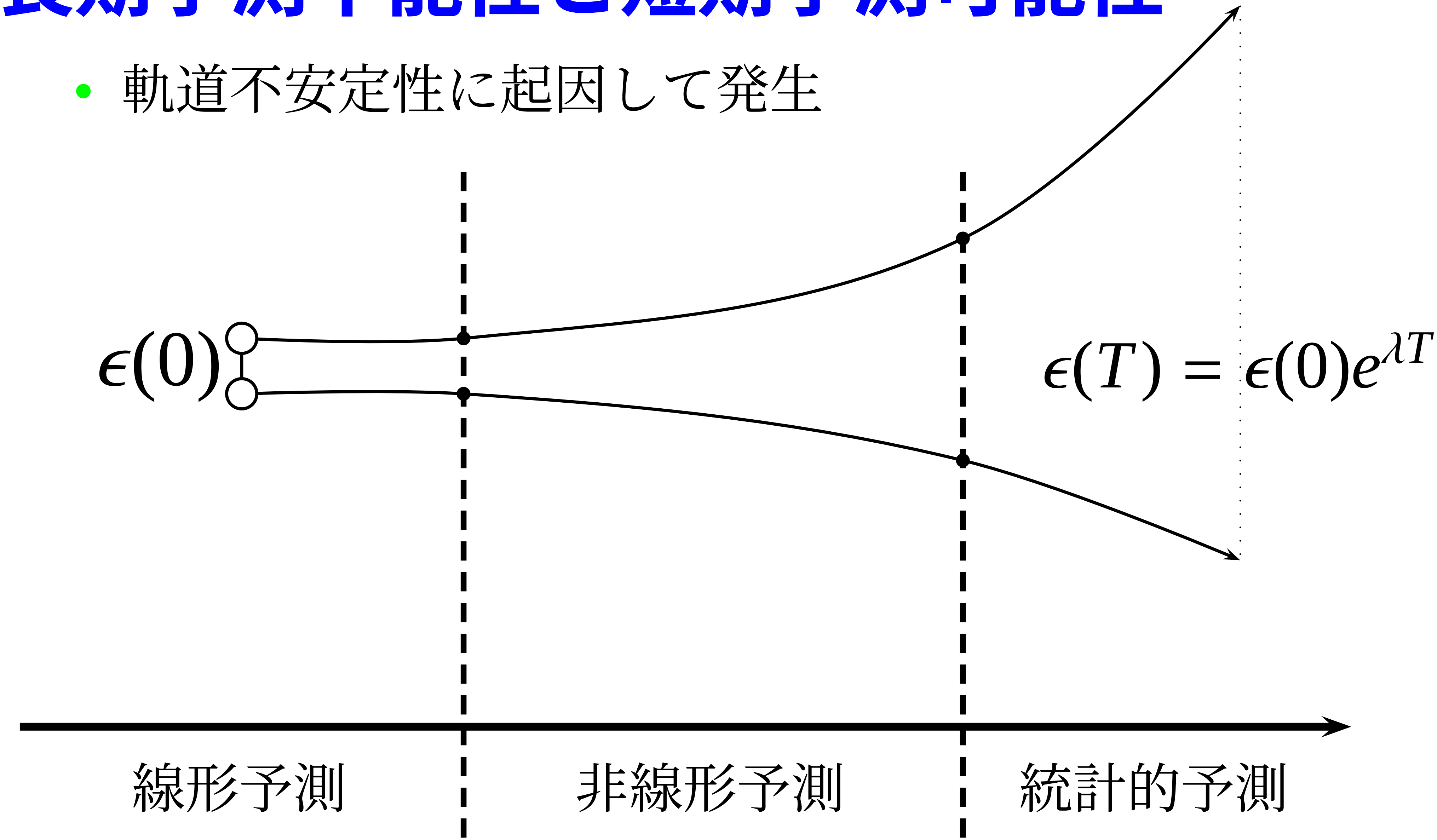
ロジスティック写像 $x(n+1) = 4x(n)(1 - x(n))$

$$x(0) = \begin{cases} \color{cyan}{0.1} \\ \color{red}{0.1 + 10^{-8}} \end{cases}$$



長期予測不能性と短期予測可能性

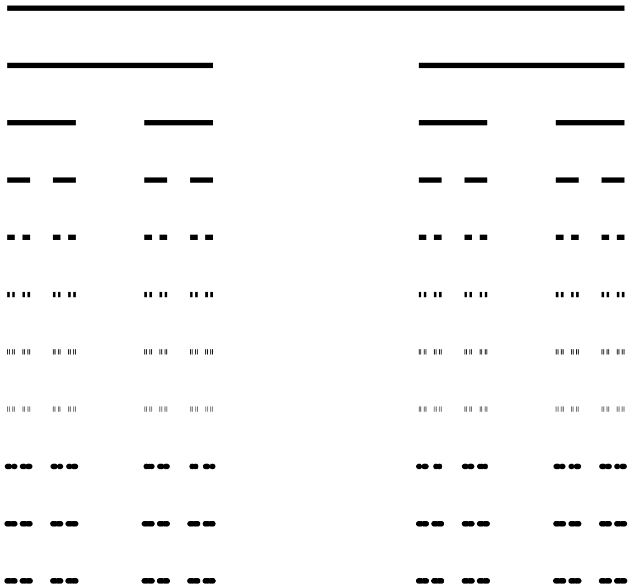
- 軌道不安定性に起因して発生



短期予測可能　**長期予測不可能**

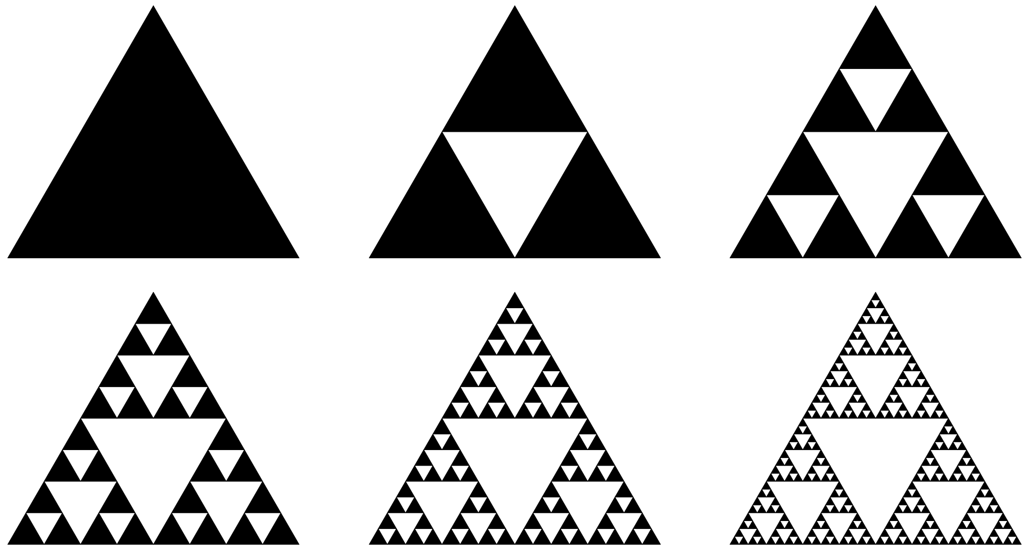
フラクタル (自己相似) 構造

カントール集合



$D_0 = 0.63$

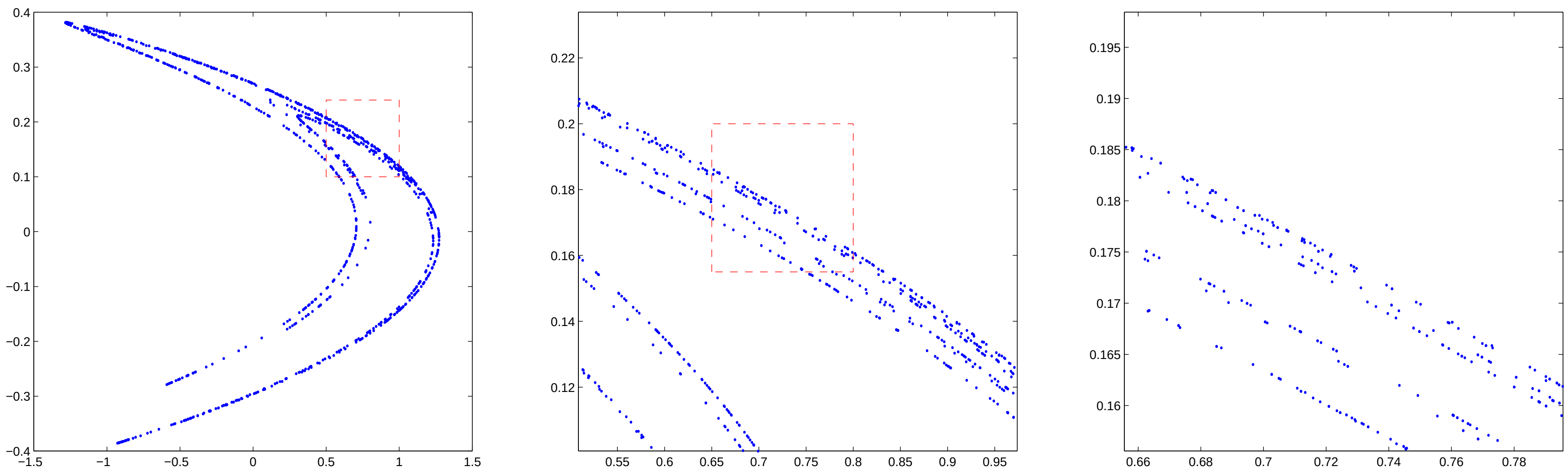
シェルピンスキーギャスケット



$D_0 = 1.585$

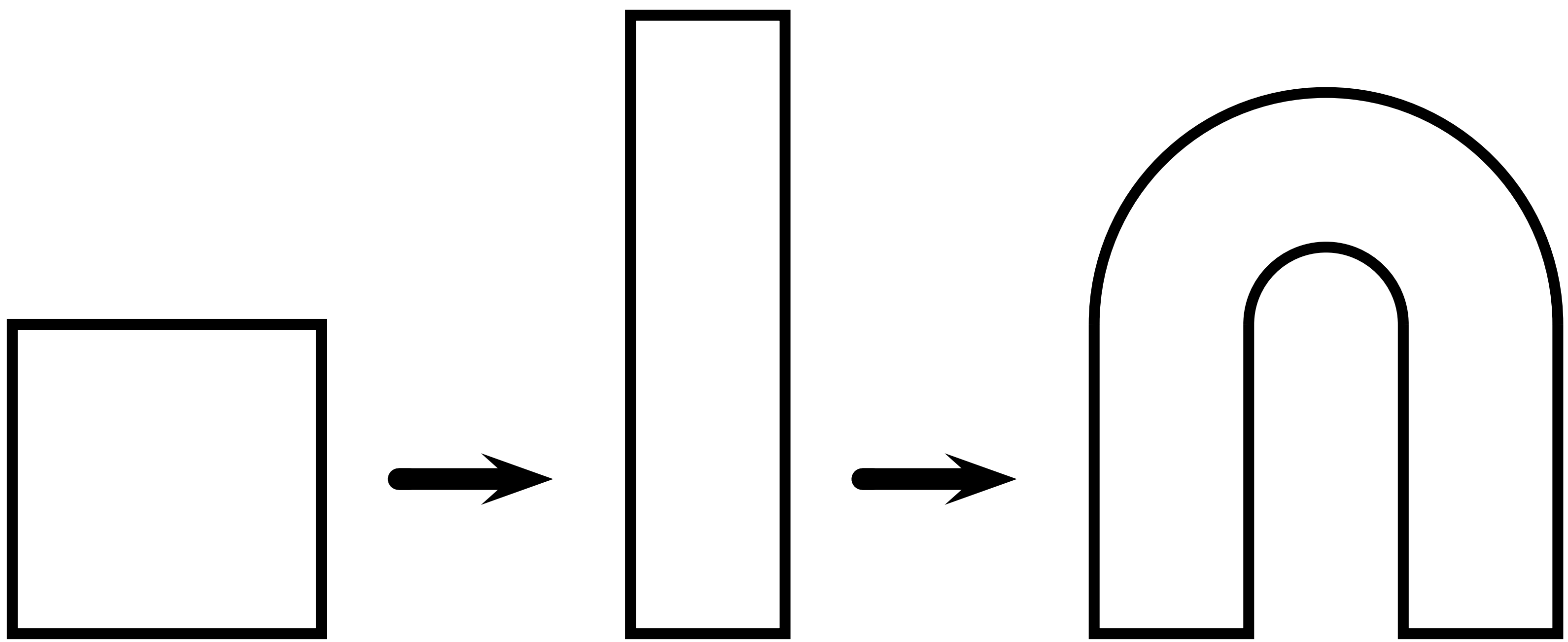
カオスアトラクタのフラクタル構造

$$
\text{エノン写像}\begin{cases} x(n+1) &=& 1 + y(n) - ax(n)^2 \\ y(n+1) &=& bx(n) \end{cases}
$$



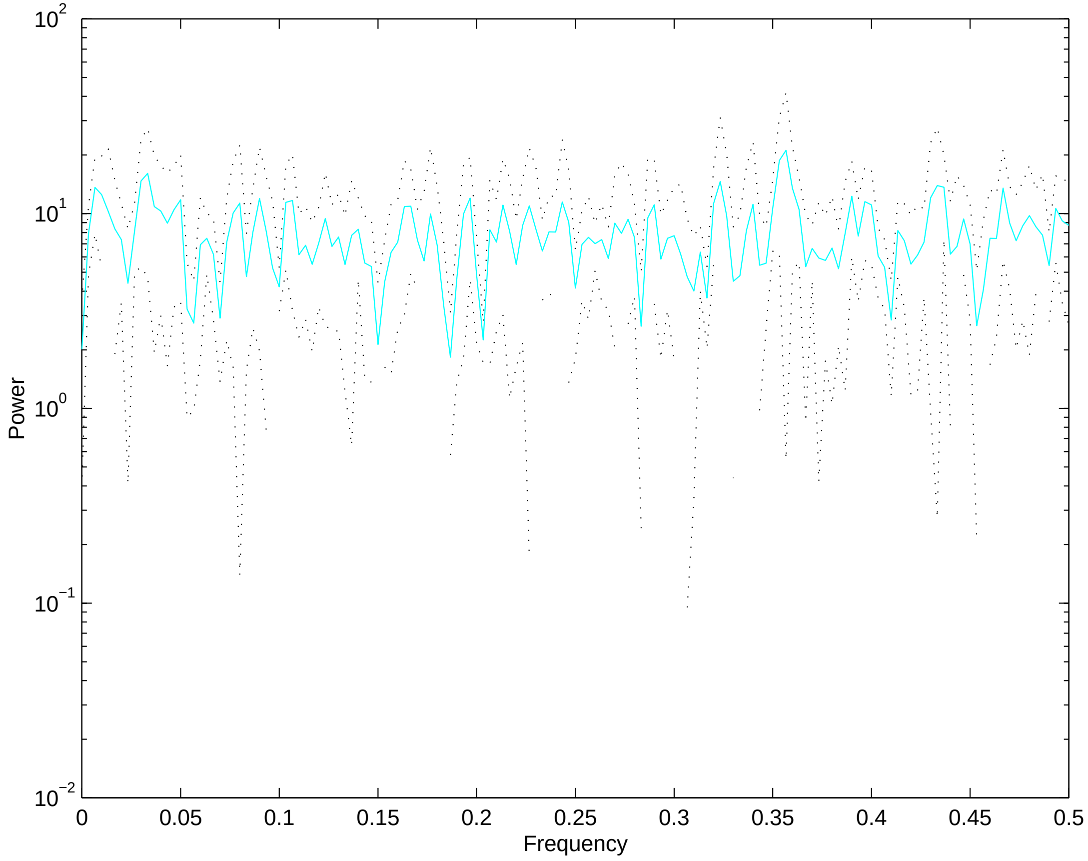
折曲げと有界性

- 有界なアトラクタに吸引されるためには，非線形な折曲げ (folding) も必要になる



非周期性

- 周期性が無い → パワースペクトラムの推定も重要



参考文献

1. J. P. Eckmann and D. Ruelle: Ergodic theory of chaos and strange attractors, Reviews of Modern Physics, **57**, 3, Part. 1, 617–656, 1985.
2. P. Grassberger, T. Schreiber and C.Schaffrath, Nonlinear Time Sequence Analysis, International Journal of Bifurcation and Chaos, **1**, 3, 521–547, 1991.
3. H. D. I. Abarbanel, R.Brown, J.J. Sidorowich and L. S. Tsimring, The analysis of observed chaotic data in physical systems, Reviews of Modern Physics, **65**, 4, 1331–1392, 1993.
4. 池口 徹, 合原 一幸, カオスと時系列解析, 電子情報通信学会誌, **J79**, 8, 814–819, 1996.